UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA RAČUNALNIŠTVO IN INFORMATIKO
LABORATORIJ ZA MATEMATIČNE METODE
V RAČUNALNIŠTVU IN INFORMATIKI

Aleksandra Franc

REŠENE NALOGE IZ OSNOV MATEMATIČNE ANALIZE

Študijsko gradivo

Ljubljana, 2019

Uvod

Naloge na naslednjih straneh so prirejene iz nalog, ki so se pojavljale na kolokvijih pri predmetu Osnove matematične analize za študente univerzitetnega študija računalništva in informatike na FRI med leti 2012 in 2018. Ponavljanju nalog, ki jih rešujemo na vajah, sem se skušala izogniti. Nalog z vaj v tej zbirki torej ni, razen nekaj redkih izjem, ki so se s kolokvijev z leti preselile na vaje.

Ta zbirka vaj prav tako ni učbenik. Informacije v okvirjih so tam le zato, da vas spomnijo na nekaj najpomembnejših dejstev, ki jih boste morali pri danem sklopu nalog znati. Priporočam, da si pred reševanjem vsakega sklopa preberete ustrezno poglavje v učbeniku [4]. Tam je teorija iz okvirjev natančno razložena in reševanje kolokvijskih nalog bo veliko lažje, če jo boste razumeli. Če se vam zdi celo poglavje teorije prevelik zalogaj, pa priporočam, da si pred reševanjem kolokvijskih nalog v učbeniku pogledate vsaj vse rešene primere, ki veliko lepše ilustrirajo posamezne koncepte, in se šele nato lotite nalog iz te zbirke.

Pri sestavljanju nalog za kolokvije so sodelovali številni asistenti, ki so na FRI poučevali ali še poučujejo ta predmet, za kar se jim iskreno zahvaljujem. Posebej se zahvaljujem še Martinu Vuku, ki je poskrbel za programsko rešitev, ki omogoča, da naloge v izvornih datotekah ostanejo pri svojih rešitvah, v zbirki pa se izpišejo na koncu. Brez tega bi bilo pisanje zbirke veliko težje.

To študijsko gradivo ni recenzirano in gotovo so se v rešitve nalog prikradle napake. Če mislite, da je kakšna rešitev napačna, ste vabljeni, da se oglasite na govorilnih urah.

Za lažjo navigacijo po dokumentu so na voljo bližnjice. Če kliknete na simbol ⇩ ob nalogi, boste skočili do rešitve. Če kliknete na simbol ⇧ ob rešitvi, se boste vrnili k besedilu naloge. Vseeno priporočam, da vsaki nalogi posvetite nekaj časa, preden se lotite branja rešitve.

Oznake

$\mathbb{N}$ ... množica naravnih števil

$\mathbb{R}$ ... množica realnih števil

$\mathbb{C}$ ... množica kompleksnih števil

i ... imaginarna enota $i = \sqrt{-1}$

$\mathrm{re}(z)$ ... realni del kompleksnega števila z

$\mathrm{im}(z)$ ... imaginarni del kompleksnega števila z

$\arg(z)$ ... argument kompleksnega števila z (polarni kot)

$|z|$ ... absolutna vrednost kompleksnega števila z

a_n ... n-ti člen zaporedja

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ... zaporedje

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ... limita zaporedja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ... neskončna vrsta s členi $a_0, a_1, a_2, \dots$

s_n ... n-ta delna vsota vrste, $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$

$f(x)$ ... funkcija ene spremenljivke

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ... limita funkcije, ko se x približuje $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$f'(x)$ ... odvod funkcije ene spremenljivke

$\log(x)$ ... logaritem z osnovo e (naravni logaritem)

$f(x, y)$ ... funkcija dveh spremenljivk

$f_x(x, y)$ ... parcialni odvod funkcije dveh spremenljivk po spremenljivki x

$f_{xy}(x, y)$ ... drugi (mešani) parcialni odvod funkcije dveh spremenljivk

$|\vec{a}|$ ... dolžina vektorja $\vec{a}$

$\int f(x)\, dx$ ... nedoločeni integral funkcije f

$\int_a^b f(x)\, dx$ ... določeni integral funkcije f v mejah od a do b

Kazalo

POGLAVJE 1

Indukcija

Princip matematične indukcije
Naj bo $P(n)$ neka lastnost na množici naravnih števil $\mathbb{N}$ in $n_0 \in \mathbb{N}$ poljubno naravno število. Če pokažemo, da

- velja $P(n_0)$ (*baza indukcije*) in
- če za neko naravno število n velja $P(n)$ (*indukcijska predpostavka*), potem velja tudi $P(n+1)$ (*indukcijski korak*),

potem smo dokazali, da lastnost $P(n)$ velja za vse $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.

NALOGA 1.
Z uporabo indukcije pokaži, da za vsako od 1 večje naravno število n velja enakost

$$1 + 3 + \cdots + (2n-3) + (2n-1) = n^2.$$

NALOGA 2.
S popolno indukcijo dokaži, da za vsako naravno število $n \geq 1$ velja neenakost:

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^3 + \cdots + n \cdot 4^n > \frac{(3n-1) \cdot 4^{n+1}}{9}.$$

NALOGA 3.
S pomočjo matematične indukcije dokaži, da za vsa naravna števila $n \geq 1$ velja

$$\frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+3)} = \frac{n(5n+13)}{12(n+2)(n+3)},$$

nato pa izračunaj vsoto vrste

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+3)}.$$

NALOGA 4.
Z uporabo matematične indukcije pokaži, da je izraz $7^n + 5$ deljiv s 3 za vsako pozitivno naravno število n.

NALOGA 5.
Z uporabo matematične indukcije pokaži, da je za vsak $n \in \mathbb{N}$ število $7n^3 - n$ deljivo s 6.

NALOGA 6.
Z uporabo matematične indukcije pokaži, da za vsak $n \geq 1$ velja, da je število oblike $7^{n+1} + 8^{2n-1}$ deljivo z 19.

NALOGA 7.
Zaporedje števil $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je definirano z začetnima členoma $a_0 = 0$, $a_1 = 2$ in rekurzivno zvezo

$$a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2},$$

ki velja za $n \geq 2$. S pomočjo matematične indukcije dokaži, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$a_n = 3^n - 1\,.$$

POGLAVJE 2

Kompleksna števila

Kartezični zapis
Kompleksno število $z \in \mathbb{C}$ lahko zapišemo v obliki

$$z = x + iy,$$

kjer je $x = \mathrm{re}(z)$ realni del števila z, $y = \mathrm{im}(z)$ imaginarni del števila z in $i = \sqrt{-1}$ imaginarna enota. *Konjugirana vrednost* kompleksnega števila $z = x + iy$ je število

$$\overline{z} = x - iy.$$

NALOGA 8.
Poišči vse rešitve enačbe

$$|z - i| = |z + 1|$$

v kompleksnih številih in skiciraj množico rešitev.

NALOGA 9.
Poišči vse kompleksne rešitve enačbe

$$z(\overline{z} + i) = 1 + i.$$

NALOGA 10.
Poišči vse rešitve $z \in \mathbb{C}$ enačbe

$$z\overline{z} - 3z = 3\sqrt{2}i.$$

Polarni zapis
Kompleksno število $z \in \mathbb{C}$ lahko zapišemo v obliki

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi},$$

kjer je r razdalja od izhodišča in φ polarni kot. Pri tem velja

$$r = |z| \quad \text{in} \quad \varphi = \arctan\left(\frac{\mathrm{im}(z)}{\mathrm{re}(z)}\right).$$

De Moivrova formula
Za vsako kompleksno število $z \in \mathbb{C}$ in naravno število $n \in \mathbb{N}$ velja

$$z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)).$$

NALOGA 11.
Dana je enačba

$$4z^2 + 2z + 1 = 0.$$

a. Poišči vse njene kompleksne rešitve $z \in \mathbb{C}$.
b. S pomočjo polarnega zapisa in de Moivrove formule izračunaj tretjo potenco rešitve, ki se nahaja v tretjem kvadrantu.

Naloga 12.
Poišči vsa kompleksna števila, ki zadoščajo enačbi
$$z^4 + \sqrt{2}i = \sqrt{2},$$
in jih nariši v kompleksni ravnini.

Naloga 13.
Dano je kompleksno število $w = \frac{4\sqrt{3}+2i}{7-\sqrt{3}i}$.

a. Določi realni in imaginarni del števila w.
b. Zapiši w v polarni obliki.
c. Poišči vsa kompleksna števila z, ki rešijo enačbo $z^3 = w^2$.

Naloga 14.
Dano je kompleksno število $w = \frac{1+i}{1-i}$.

a. Zapiši realni in imaginarni del števila w.
b. Zapiši število w v polarni obliki.
c. S pomočjo polarnega zapisa in de Moivrove formule poišči vse rešitve enačbe
$$z^2 = w.$$

Naloga 15.
Dano je kompleksno število $w = \frac{4+2i}{3-i}$.

a. Zapiši realni in imaginarni del števila w.
b. Zapiši število w v polarni obliki.
c. S pomočjo polarnega zapisa in de Moivrove formule poišči vse rešitve enačbe $z^3 = w$ in jih skiciraj v kompleksni ravnini.

Naloga 16.
Poišči vse kompleksne rešitve enačbe
$$(z^3 + 1)(z - \bar{z} - 2i) = 0.$$

Naloga 17.
V kompleksnih številih reši enačbi

a. $z^3 = 8$,
b. $z^6 - 7z^3 - 8 = 0$,

in rešitve skiciraj.

Naloga 18.
Poišči vse kompleksne rešitve enačbe
$$(z^2 + 1)(z^4 + 1) = 0$$
in jih nato skiciraj v kompleksni ravnini.

Naloga 19.
Kompleksno število
$$z = -8$$
zapiši v polarnih koordinatah in nato določi vse rešitve enačbe
$$w^4 + 8 = 0.$$

Naloga 20.
Naj bo $w = -\sqrt{3} + 3i$.

a. Z uporabo polarnega zapisa in de Moivrove formule izračunaj w^7.
b. Poišči kompleksno število z, ki je rešitev enačbe $|z| + z = 2 + i$.

NALOGA 21.
Dana je enačba
$$\frac{z^3}{3} = 1 - \sqrt{3}i.$$

a. Poišči vse njene kompleksne rešitve $z \in \mathbb{C}$.
b. Izračunaj tretjo potenco rešitve z najmanjšim polarnim kotom.

NALOGA 22.
Dano je kompleksno število $w = 8 - 8i$.

a. Izračunaj w^4.
b. Reši enačbo $z^3 = w$.

NALOGA 23.
Poišči vse rešitve $z \in \mathbb{C}$ enačbe
$$z\overline{z} = z + \overline{z},$$
ki zadoščajo tudi enačbi
$$z^4 + 4 = 0.$$

NALOGA 24.
Poišči vse kompleksne rešitve enačbe
$$iz^3 - 2\sqrt{3} = 2i.$$

NALOGA 25.
Dana je enačba
$$3a - 2ai = 5 + i.$$

a. Iz enačbe izrazi kompleksno število a in njegov zapis poenostavi.
b. Kompleksno število a zapiši v polarni obliki.
c. Poišči vse rešitve kompleksne enačbe
$$z^5 = a$$
in jih nariši v kompleksni ravnini.

Kompleksne transformacije
Operacije s kompleksnimi števili imajo geometrijski pomen.

- Konjugiranje $z \mapsto \overline{z}$ je zrcaljenje prek realne osi.
- Prištevanje kompleksnega števila $a \in \mathbb{C}$, $z \mapsto z + a$, je translacija za $\mathrm{re}(a)$ v smeri realne osi in $\mathrm{im}(a)$ v smeri imaginarne osi.
- Množenje z realnim številom $r \in \mathbb{R}$, $z \mapsto r \cdot z$, je središčni razteg za faktor r.
- Množenje z $e^{i\varphi} \in \mathbb{C}$, $z \mapsto z \cdot e^{i\varphi}$, je rotacija za kot φ okoli izhodišča.
- Množenje s kompleksnim številom $w \in \mathbb{C}$, $z \mapsto z \cdot w$, je sestavljeno iz središčnega raztega za faktor $|w|$ in rotacije za kot $\arg(w)$ okrog izhodišča.

Pri tem pozitiven φ ustreza rotaciji v pozitivni smeri (nasproti smeri vrtenja urinega kazalca), negativen φ pa rotaciji v negativni smeri (v smeri urinega kazalca).

NALOGA 26.
Dana je množica
$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \arg(z) < \frac{\pi}{2}, \; |z| \leq 2\}.$$

a. Nariši množico A.
b. Nariši množico B, ki jo dobimo, ko na množici A naredimo transformacijo

$$z \mapsto \sqrt{2}z(1+i)+1.$$

c. Z območjem A naredimo naslednjo transformacijo.
  - Zavrtimo ga za kot π.
  - Prezrcalimo ga preko realne osi.
  - Premaknemo ga za 1 v levo in 1 navzgor.

  Zapiši predpis, ki opravi opisano transformacijo.

NALOGA 27.

V kompleksni ravnini sta podani območji A in B:

$$\begin{aligned} A &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1-i| \leq 2,\ \frac{\pi}{2} < \arg(z-1-i) \leq \pi\}, \\ B &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1,\ \pi \leq \arg(z) < 2\pi\}. \end{aligned}$$

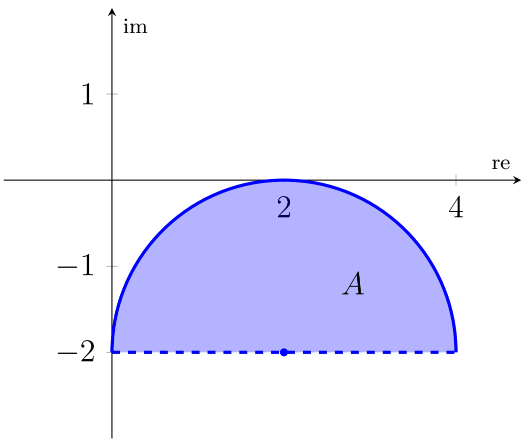
a. Nariši obe območji.
b. Poišči preslikavo g, ki območje A preslika v območje B.

NALOGA 28.

Dano je območje A v kompleksni ravnini.

a. Zapiši predpis, ki mu zadoščajo natanko kompleksna števila v območju A.
b. Nariši območje B, ki ga dobiš, ko območje A preslikaš s preslikavo

$$f(z) = i(z-1)-2.$$



POGLAVJE 3

Zaporedja in vrste

Eulerjevo število
Za Eulerjevo število e, ki je osnova naravnega logaritma, velja

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Geometrijsko zaporedje
Geometrijsko zaporedje $a_n = a \cdot q^n$ je konvergentno natanko tedaj, ko je $q \in (-1, 1]$. Pri tem je

- $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, če je $q = 1$,
- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, če je $q \in (-1, 1)$.

Nekaj pravil za računanje z limitami
Za zaporedji $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in število $\alpha \in \mathbb{R}$ velja:

- $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$,
- $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$,
- $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$, če je $b_n \neq 0$ za vse $n \in \mathbb{N}$ in $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$,
- $\lim_{n\to\infty} (\alpha a_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} a_n$,
- $\lim_{n\to\infty} (a_n)^\alpha = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^\alpha$, če je $a_n > 0$ za vse $n \in \mathbb{N}$ in je $\alpha \neq 0$,
- $\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \lim_{n\to\infty} a_n{}^{\lim_{n\to\infty} b_n}$, če je $a_n > 0$ za vse $n \in \mathbb{N}$ in obe limiti obstajata.

NALOGA 29. ⇩
Izračunaj limiti.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} + 3 \cdot 5^{2n+1}}{2 \cdot 3^{2n-1} + (-1)^n\, 25^n} \quad \text{in} \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n-1}{2+3n}\right)^{2n-1} .$$

NALOGA 30. ⇩
Izračunaj limito zaporedja s splošnim členom

$$a_n = \frac{1}{4}(2^{-n} - 2)$$

in ugotovi, koliko členov zaporedja je od limite oddaljeno za vsaj $\frac{1}{100}$.

Monotonost
Zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je *naraščajoče*, če za vse $n \in \mathbb{N}$ velja
$$a_{n+1} \geq a_n.$$
Zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je *padajoče*, če za vse $n \in \mathbb{N}$ velja
$$a_{n+1} \leq a_n.$$

Omejenost
Zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je *navzgor omejeno*, če obstaja *zgornja meja* M, tj. tako število $M \in \mathbb{R}$, da za vse $n \in \mathbb{N}$ velja
$$a_n \leq M.$$
Zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je *navzdol omejeno*, če obstaja *spodnja meja* m, tj. tako število $m \in \mathbb{R}$, da za vse $n \in \mathbb{N}$ velja
$$a_n \geq m.$$
Zaporedje je *omejeno*, če je navzgor in navzdol omejeno.

Dokazovanje konvergentnosti
Naraščajoče zaporedje je konvergentno natanko tedaj, ko je navzgor omejeno.
Padajoče zaporedje je konvergentno natanko tedaj, ko je navzdol omejeno.

Naloga 31.
Rekurzivno zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je podano z začetnim členom $a_0 = 4$ ter z rekurzivno zvezo
$$a_n = 7 - \frac{10}{a_{n-1}}$$
za $n \geq 1$.

a. Izračunaj a_1 in a_2.
b. Poišči kandidate za limito zaporedja a_n.
c. Z indukcijo pokaži, da je zaporedje a_n omejeno navzgor s 5, nato pa še, da je zaporedje naraščajoče. Kaj je limita?

Naloga 32.
Zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je podano rekurzivno z začetnim členom $a_0 = 0$ in s pravilom
$$a_n = \sqrt{6 + a_{n-1}}$$
za $n \geq 1$.

a. Ali je zaporedje a_n monotono?
b. Določi možne limite zaporedja a_n.
c. Dokaži, da ima zaporedje a_n res limito.

Naloga 33.
Rekurzivno zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je podano z začetnim členom $a_0 = 0$ ter z rekurzivno zvezo
$$a_n = \frac{3a_{n-1} + 2}{5}$$
za $n \geq 1$.

a. Izračunaj a_1 in a_2.
b. Poišči kandidate za limito zaporedja a_n.
c. Z indukcijo pokaži, da je zaporedje a_n omejeno navzgor z 1. Nato dokaži še, da je zaporedje naraščajoče. Koliko je $\lim_{n\to\infty} a_n$?

Naloga 34.

Naj bo zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ podano rekurzivno z začetnim členom $a_0 = 0$ in splošno zvezo

$$a_n = \frac{a_{n-1}^2 + 6}{5}$$

za $n \geq 1$.

a. Z indukcijo dokaži, da je zaporedje navzgor omejeno z 2.
b. Dokaži, da je zaporedje naraščajoče.
c. Dokaži, da je zaporedje konvergentno ter izračunaj limito.

Vsota vrste

Vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je *konvergentna* natanko tedaj, ko konvergira zaporedje

$$s_k = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k = \sum_{n=0}^{k} a_n$$

njenih delnih vsot. *Vsota vrste* je tedaj enaka limiti

$$s = \lim_{k\to\infty} s_k.$$

Potrebni pogoj za konvergentnost

Če je $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, potem vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ni konvergentna.

Geometrijska vrsta

Geometrijska vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ je konvergentna natanko tedaj, ko je $|q| < 1$. Njena vsota je tedaj enaka

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}\ .$$

Od tod lahko izpeljemo še

$$\sum_{n=k}^{\infty} aq^n = \frac{aq^k}{1-q}\ .$$

Naloga 35.

Dana je vrsta

$$\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{5^{n-1}}\ .$$

Ugotovi, ali konvergira. Če konvergira, jo seštej.

Naloga 36.

Ali katera od spodnjih vrst konvergira? Zakaj oziroma zakaj ne? Če vrsta konvergira, jo seštej.

a. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5\cdot 4^n}{3^{2n}}$,
b. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5\cdot 3^{2n}}{4^n}$.

Naloga 37.
Zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je dano s predpisom

$$a_n = \frac{9 \cdot 3^n}{2^{2n}}$$

za vse $n \geq 0$.

a. Izračunaj limito $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
b. Izračunaj vsoto vrste $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{9\cdot 3^n}{2^{2n}}$ ali pokaži, da vrsta ne konvergira.

Naloga 38.
Ugotovi, ali vrsta

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-2^k}{3^{k+1}}$$

konvergira ali ne. Če konvergira, jo seštej.

Naloga 39.
Naj bo

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

a. Izračunaj $\lim_{n\to\infty} a_n$.
b. Ali vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergira?
c. Izračunaj vsoto vrste

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{3^{n-2}} .$$

Naloga 40.
Seštej vrsto

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^n .$$

Za katere vrednosti x konvergira vrsta

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{x-2}{5}\right)^n ?$$

Naloga 41.
Za katere vrednosti parametra a je vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(a-1)^{2n}}{3^{n+1}}$$

konvergentna? Za te vrednosti parametra tudi izračunaj njeno vsoto.

Naloga 42.
Dana je vrsta

$$\sum_{n=2}^{\infty} 2\left(\frac{3x}{x+1}\right)^n .$$

a. Ugotovi, za katere vrednosti x ta vrsta konvergira.
b. Za te vrednosti x jo seštej.

POGLAVJE 4

Funkcije

Računanje limit funkcij
Pri računanju limit funkcij (tudi levih in desnih ter limit v neskončnosti) veljajo enaka pravila kot pri računanju limit zaporedij. Velja tudi

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \quad \text{in} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

L'Hospitalovo pravilo
Naj bosta f in g odvedljivi funkciji in naj bo $g'(x) \neq 0$ na nekem odprtem intervalu okoli a (razen morda v a). Če je

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \quad \text{ali pa} \quad \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty,$$

potem je

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Naloga 43.
Izračunaj naslednje limite, če obstajajo:

a. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$,

b. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x+x^2}{e^x+4x}$,

c. $\lim\limits_{x\searrow 2}\dfrac{x^2+4x-12}{|x-2|}$,

d. $\lim\limits_{x\nearrow 2}\dfrac{x^2+4x-12}{|x-2|}$.

Zveznost funkcije
Funkcija f je *zvezna* v točki a, če je

$$\lim_{x\searrow a} f(x) = f(a) = \lim_{x\nearrow a} f(x).$$

Če je funkcija f zvezna v točki $L = \lim\limits_{x\to a} g(x)$, potem je

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(\lim_{x\to a} g(x)),$$

tj. pri računanju limit lahko menjamo vrstni red limite in zvezne funkcije.

Naloga 44.
Funkcija $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ je podana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{1/x}-1}{e^{1/x}+1}, & x \neq 0,\\ a, & x = 0.\end{cases}$$

a. Izračunaj levo in desno limito v točki 0.
b. Ali je možno izbrati tak a, da bo funkcija f zvezna?
c. Skiciraj graf funkcije f.

NALOGA 45.
Funkcija f je definirana s predpisom

$$f(x)=\begin{cases}\log(x)+2, & x\geq 1,\\ ax+b, & -1<x<1,\\ e^{x+1}+3, & x\leq -1.\end{cases}$$

a. Določi a in b tako, da bo funkcija f zvezna na vsej realni osi.
b. Izračunaj $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{x+1}+3\right)$.
c. Skiciraj graf funkcije f.
d. Ali je funkcija f injektivna?

NALOGA 46.
Določi konstanti a in b tako, da bo funkcija f, definirana s predpisom

$$f(x)=\begin{cases}-x-5, & x\leq -2,\\ ax^2+b, & -2<x<1,\\ \log x, & x\geq 1,\end{cases}$$

zvezna na vsej realni osi. Pri tako določenih a in b poišči zalogo vrednosti funkcije f ter ugotovi, ali je injektivna.

NALOGA 47.
Funkcija f je definirana s predpisom

$$f(x)=\begin{cases}ae^x, & x\leq -2,\\ x+1, & -2<x<1,\\ b+\frac{1}{x}, & x\geq 1.\end{cases}$$

a. Določi a in b tako, da bo f zvezna na vsej realni osi.
b. Določi zalogo vrednosti f.
c. Ali je f injektivna?

NALOGA 48.
Funkcija $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$ je podana s predpisom

$$f(x)=\begin{cases}\arctan\left(\frac{1}{1-x}\right), & x<1,\\ a\frac{\sqrt{x-1}}{x-1}, & x>1.\end{cases}$$

Določi tak $a\in\mathbb{R}$, da bo mogoče f zvezno razširiti na vsa realna števila.

NALOGA 49.
Naj bo

$$f(x)=\arctan\left(\frac{1}{x-1}\right).$$

a. Določi definicijsko območje funkcije f.
b. Izračunaj limiti $\lim\limits_{x\searrow 1}f(x)$ in $\lim\limits_{x\nearrow 1}f(x)$.
c. Za katere $a\in\mathbb{R}$ lahko funkcijo

$$g(x)=(x+a)\arctan\left(\frac{1}{x-1}\right)$$

razširimo do zvezne funkcije na celotni realni osi?

Zaloga vrednosti in graf
Zaloga vrednosti funkcije $f\colon \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ je množica
$$\mathcal{Z}_f = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid x \in \mathcal{D}_f\}.$$
Graf funkcije f je množica
$$\{(x, f(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \in \mathcal{D}_f\}.$$

Sodost in lihost
Funkcija f je *soda*, če za vse $x \in \mathcal{D}_f$ velja
$$f(-x) = f(x).$$
Funkcija f je *liha*, če za vse $x \in \mathcal{D}_f$ velja
$$f(-x) = -f(x).$$

Injektivnost in surjektivnost
Funkcija f je *injektivna*, če različni števili preslika v različni vrednosti, tj. za vse $x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f$ velja
$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Funkcija $f\colon \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ je *surjektivna*, če je $\mathcal{Z}_f = \mathbb{R}$.

Monotonost
Za odvedljivo funkcijo f velja:
- če je $f'(x) \geq 0$ za vse $x \in (a, b)$, je f naraščajoča na intervalu (a, b),
- če je $f'(x) \leq 0$ za vse $x \in (a, b)$, je f padajoča na intervalu (a, b).

Če odvod f' v točki x_0 spremeni predznak, potem je x_0 lokalni ekstrem funkcije f.

Konveksnost in konkavnost
Za dvakrat odvedljivo funkcijo f velja:
- če je $f''(x) \geq 0$ za vse $x \in (a, b)$, je f konveksna na intervalu (a, b),
- če je $f''(x) \leq 0$ za vse $x \in (a, b)$, je f konkavna na intervalu (a, b).

Če drugi odvod f'' v točki x_0 spremeni predznak, potem je x_0 prevoj.

NALOGA 50.
Dana je funkcija
$$f(x) = \frac{x}{x^3 - 1}\ .$$

a. Poišči definicijsko območje funkcije f.
b. Določi ničle in pole funkcije f.
c. Izračunaj odvod funkcije f in določi morebitne lokalne ekstreme.
d. Skiciraj graf funkcije f.

NALOGA 51.
Dana je funkcija $f(x) = x^2 \log x$.

a. Določi definicijsko območje, ničle in limite na robu definicijskega območja.
b. Izračunaj odvod in limite odvoda na robu definicijskega območja.
c. Določi ekstreme in intervale naraščanja in padanja.
d. Določi prevoje in intervale konveksnosti in konkavnosti.

e. Nariši graf funkcije.

NALOGA 52.
Skiciraj graf funkcije

$$f(x) = xe^{\frac{1}{x}}.$$

Pri tem moraš določiti definicijsko območje, obnašanje na robu definicijskega območja (leve in desne limite), stacionarne točke, območja naraščanja in padanja ter območja konveksnosti in konkavnosti.

NALOGA 53.
Za funkcijo

$$f(x) = \frac{\log(x^2)}{x}$$

določi definicijsko območje D_f, simetrijo (sodost/lihost), ničle, stacionarne točke, intervale naraščanja/padanja, intervale konveksnosti/konkavnosti ter limite na robovih D_f, nato pa funkcijo čim bolj natančno nariši.

NALOGA 54.
Dana je funkcija

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{x^2 - 1}\right).$$

Določi definicijsko območje, ničle, pole in limite funkcije f na robu definicijskega območja ter nato skiciraj njen graf.

NALOGA 55.
Skiciraj graf funkcije

$$f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Pri tem moraš določiti ničle, stacionarne točke, območja naraščanja in padanja, prevoje, območja konkavnosti in konveksnosti ter izračunati limito $f(x)$ za $x \to \infty$ in $x \to -\infty$.

POGLAVJE 5

Odvod, tangente in ekstremalni problemi

Tangenta
Enačba tangente na graf odvedljive funkcije f v točki $(x_0, f(x_0))$ je

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$

tj. smerni koeficient tangente je enak vrednosti odvoda $f'(x_0)$.

NALOGA 56.
Podana je funkcija $f(x) = \log\left(\frac{x}{x-1}\right)$.

a. Določi definicijsko območje in ničle funkcije f.
b. Nariši grafa funkcij $g(x) = \frac{x}{x-1}$ in $f(x) = \log\left(\frac{x}{x-1}\right)$ v isti koordinatni sistem.
c. Izračunaj enačbo tangente na graf funkcije f v točki $x = 2$.

NALOGA 57.
Dana je funkcija

$$f(x) = \sqrt{6 - x + x^2}.$$

a. Določi definicijsko območje funkcije f in jo približno skiciraj.
b. Zapiši enačbo tangente na graf funkcije f v točki $x = 2$.

NALOGA 58.
Poišči vse točke x, kjer tangenta na graf funkcije

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 10x - 4$$

oklepa z osjo x kot $\frac{\pi}{4}$, in v vsaki dobljeni točki zapiši enačbo tangente.

NALOGA 59.
Dana je implicitno podana krivulja

$$x^2 + 2xy - 3y^2 = 1.$$

Poišči točki na krivulji z x koordinato enako 1. Zapiši enačbi tangent na krivuljo v dobljenih točkah in poišči njuno presečišče.

NALOGA 60.
Dana je funkcija

$$f(x) = \log\left(\frac{x^2}{2 - x}\right).$$

a. Določi definicijsko območje funkcije f.
b. Določi vse x, za katere je tangenta na graf funkcije $y = f(x)$ v točki $(x, f(x))$ vzporedna premici z enačbo $y = -\frac{1}{2}(x + 6)$.

Ekstremi funkcije ene spremenljivke

Točke, v katerih je $f'(x_0) = 0$, imenujemo *stacionarne* (ali *kritične*) točke in so kandidati za ekstreme funkcije. Če odvod f' v točki x_0 spremeni predznak, potem je x_0 lokalni ekstrem funkcije f.

Če je f dvakrat odvedljiva in x_0 njena stacionarna točka, potem ima funkcija f v točki x_0

- lokalni minimum, če je $f''(x_0) > 0$ in
- lokalni maksimum, če je $f''(x_0) < 0$.

Kandidati za ekstreme so še točke, v katerih odvod ni definiran, in točke, ki ležijo na robu definicijskega območja.

NALOGA 61.

Dani sta točki $A(1, -2)$ in $B(3, 3)$. Poišči tisto točko C na paraboli $y = x^2$, za katero je vsota kvadratov razdalj do točk A in B minimalna.

NALOGA 62.

Naj bosta x in y števili z intervala $[0, 7]$, katerih vsota je enaka 6. Določi števili x in y tako, da bo:

a. vrednost $x^2 + 2y^2$ najmanjša,
b. vrednost $x^2 + 2y^2$ največja.

NALOGA 63.

Janez se vozi po ravnini Zahodne Sahare po cesti, ki ima obliko krivulje $y = \sqrt{3x^2 - 2x + 1}$ in išče mesto, kjer bo signal najmočnejši in bo lahko odgovoril na nujen klic od doma. Poišči točko na Janezovi cesti, ki je najbliže mobilnemu oddajniku, ki stoji v točki $T(3, 0)$.

NALOGA 64.

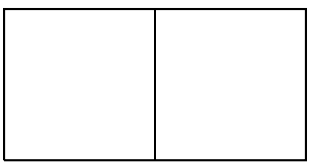
S terenskim vozilom se vozimo po ravni cesti vzdolž osi x. Radi bi prišli do točke $A(200, 24)$. Po cesti se lahko vozimo s hitrostjo 130 km/h, po terenu zunaj osi x pa le s hitrostjo 50 km/h. Kakšno pot moramo ubrati, da pridemo čim hitreje do točke A, če začnemo v izhodišču koordinatnega sistema?

NALOGA 65.

Podjetje želi izdelovati posode valjaste oblike brez pokrova. Kakšno mora biti razmerje med višino posode v in polmerom osnovne ploskve r, da bo pri dani površini S posoda imela največjo možno prostornino V?

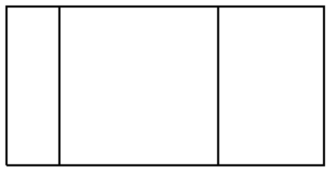
NALOGA 66.

Na voljo imamo 24 metrov ograje. Z njo bi radi ogradili pravokoten vrt tako, da bo znotraj vrta dodatna pregrada (glej sliko). Kolikšna naj bo širina in višina vrta, da bo njegova površina kar največja možna?



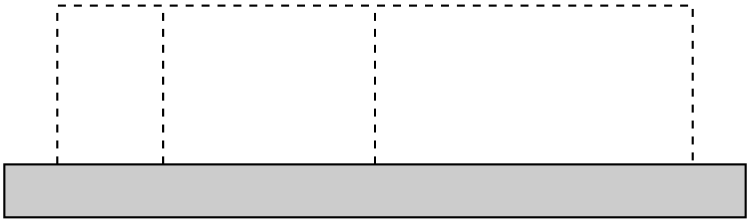
NALOGA 67.

Kot dobri vrtnarji bi radi ogradili vrt s 300 m ograje, ki nam je na razpolago. Želimo imeti pravokotno ograditev, ki je razdeljena na tri dele, kot to kaže slika. Kolikšna je največja površina, ki jo lahko tako ogradimo?



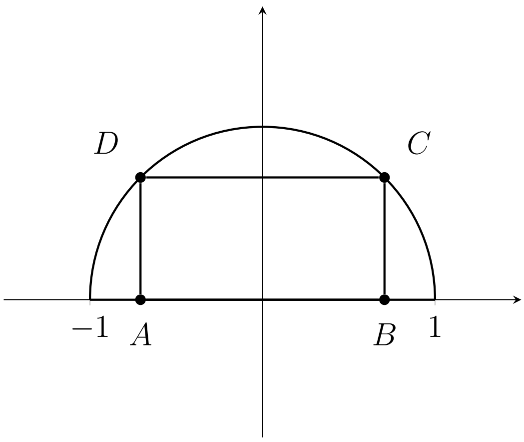
NALOGA 68.

Kmet Janez želi ob svojo zelo dolgo hišo postaviti z ograjo ograjen vrt, ki bo v obliki pravokotnika in razdeljen na 3 (ne nujno enaka) pravokotna območja. Na sliki črtkana črta predstavlja ograjo, sivo območje pa je hiša. Ob hiši ni ograje. Kakšno mora biti razmerje med dolžino in širino vrta, da bo njegova površina kar največja?



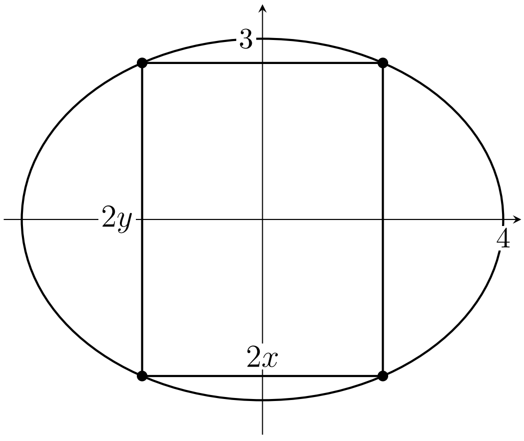
NALOGA 69.

V polkrog z radijem 1 včrtamo pravokotnik $ABCD$ tako, da oglišči A in B ležita na premeru, oglišči C in D pa na loku polkroga. Kolikšni naj bosta dolžini stranic pravokotnika, da bo ploščina pravokotnika maksimalna?



NALOGA 70.

Elipsi s polosema 4 in 3 včrtamo pravokotnik s stranicama $2x$ in $2y$, katerega stranice so vzporedne polosema. Določi x in y tako, da bo imel največjo ploščino.



POGLAVJE 6

Funkcije več spremenljivk

Gradient
Gradient funkcije dveh spremenljivk $f(x,y)$ je enak

$$(\mathrm{grad} f)(x,y) = (f_x(x,y),\ f_y(x,y)) .$$

Stacionarne točke so rešitve sistema

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 0, \\ f_y(x,y) &= 0. \end{aligned}$$

Naloga 71.
Dana je funkcija

$$f(x,y) = 2x^3y^2 - x^2y - 4x + 3y - 1.$$

a. Določi prve parcialne odvode funkcije f.
b. Zapiši funkcijo $f(x,2)$ in klasificiraj njene lokalne ekstreme.

Naloga 72.
Za funkcijo

$$f(x,y) = e^{x+y}(x-1)(y+1)$$

izračunaj $(\mathrm{grad} f)(x,y)$ in določi njene stacionarne točke.

Naloga 73.
Naj bo

$$f(x,y) = 3x^2 - 3y^2 + 8xy - 6x - 8y + 3.$$

a. Izračunaj gradient funkcije f.
b. Izračunaj stacionarne točke funkcije f.

Smerni odvod
Smerni odvod funkcije dveh spremenljivk $f(x,y)$ v točki (x_0,y_0) v smeri vektorja $\vec{a}$ je enak

$$f_{\vec{a}}(x_0,y_0) = \frac{(\mathrm{grad} f)(x_0,y_0)\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|} .$$

Pri tem $\cdot$ označuje skalarni produkt vektorjev.

Naloga 74.
Podana je funkcija dveh spremenljivk

$$f(x,y) = e^x(x + y^2 + 2y) .$$

Izračunaj smerni odvod funkcije f v točki $(0,1)$ v smeri vektorja $\vec{a} = (1,-1)$. Ali v tej smeri vrednosti funkcije f naraščajo ali padajo?

Naloga 75.
Dana je funkcija dveh spremenljivk

$$f(x,y) = xy + \frac{1}{4}(x^4 + y^4 - 5) .$$

a. Poišči in klasificiraj stacionarne točke funkcije f.
b. Izračunaj smerni odvod funkcije v točki $(1,1)$ v smeri vektorja $\vec{a} = (-1,1)$. Ali v tej smeri vrednosti funkcije f naraščajo ali padajo?
c. V kateri smeri v točki $(1,1)$ funkcijske vrednosti najhitreje naraščajo?

NALOGA 76.
Dana je funkcija $f(x,y) = \frac{2}{x} + xy + \frac{2}{y}$.

a. Določi definicijsko območje funkcije f.
b. Zapiši gradient funkcije f.
c. Izračunaj smerni odvod funkcije f v točki $(1,1)$ v smeri najhitrejšega naraščanja.

NALOGA 77.
Podana je funkcija

$$f(x,y) = x^3 - 3x^2y - 9xy^2 + 3y^2.$$

a. Določi vse njene stacionarne točke.
b. Izračunaj smerni odvod funkcije v točki $(1,1)$ v smeri proti koordinatnemu izhodišču.

NALOGA 78.
Dana je funkcija

$$f(x,y) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\log y.$$

a. Določi vse točke v ravnini, za katere je $y = \frac{1}{x}$ in ima funkcija $f(x,y)$ ekstrem.
b. Za vsako od teh točk izračunaj smerni odvod funkcije $f(x,y)$ v smeri gradienta.

Nivojnice
Nivojnica (ali nivojska množica) funkcije dveh spremenljivk je množica točk v ravnini $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, v katerih funkcija f zavzame enako vrednost. Za vsak $c \in \mathcal{Z}_f$ je ustrezna nivojnica krivulja, podana z enačbo

$$f(x,y) = c.$$

NALOGA 79.
Podana je funkcija dveh spremenljivk

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 - 2x + y^2 + 1}.$$

a. Določi njene nivojske krivulje $f(x,y) = c$ in jih skiciraj za $c = 0$, $c = 1$ in $c = 4$.
b. Določi njene stacionarne točke.
c. Določi njen gradient v točki $T(0,1)$.

NALOGA 80.
Naj bo

$$f(x,y) = \arctan\left(2x^2 - y\right).$$

a. Skiciraj nivojnice $f(x,y) = c$ za $c = -\frac{\pi}{4}$, $c = 0$ in $c = \frac{\pi}{4}$.
b. Izračunaj prva parcialna odvoda funkcije f.

NALOGA 81.
Podano imamo funkcijo dveh spremenljivk

$$f(x,y) = 9x^2 + 4y^2.$$

a. Skiciraj nivojnice funkcije $f(x,y)$ za nivoja $c = 1$ in $c = 4$.
b. Izračunaj gradient funkcije $f(x,y)$.

c. Ali funkcija $f(x,y)$ v točki $T(1,1)$ pri majhnem premiku v smeri vektorja $\vec{a} = (-2,2)$ narašča ali pada?

Naloga 82.
Naj bo

$$g(x,y) = \log\left((x-1)^2 + y^2\right).$$

a. Določi definicijsko območje funkcije g.
b. Opiši in skiciraj nivojnice funkcije g pri $c = 0$, $c = \log(4)$ in $c = \log(9)$.
c. Izračunaj smerni odvod funkcije g v točki $(0,1)$ v smeri proti koordinatnemu izhodišču.
d. V kateri smeri v točki $(0,1)$ funkcija g najhitreje pada?

Naloga 83.
Naj bo

$$f(x,y) = e^{x^2-y^2}.$$

a. Skiciraj nivojnici $f(x,y) = c$ za $c = 1$ in $c = e$.
b. Določi stacionarne točke funkcije f.
c. Določi smerni odvod v točki $(1,1)$ v smeri vektorja $\vec{a} = (0,2)$.

Naloga 84.
Za funkcijo dveh spremenljivk

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 2x}$$

a. določi definicijsko območje,
b. skiciraj nivojnice za $c = \sqrt{3}$ in $c = \sqrt{8}$,
c. izračunaj grad f in
d. določi smer najhitrejšega padanja v točki $(2,2)$.

Naloga 85.
Naj bo

$$f(x,y) = \frac{2-y^2}{1+x^2}.$$

a. Skiciraj nivojnici za $c = 0$ in $c = 1$.
b. Izračunaj gradient funkcije f v točki $(1,1)$.
c. V kateri smeri vrednost funkcije f najhitreje naraste, če se malo premaknemo iz točke $(1,1)$?

Hessejeva matrika in klasifikacija ekstremov
Hessejeva matrika dvakrat zvezno parcialno odvedljive funkcije $f(x, y)$ je matrika drugih odvodov

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{xy}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{bmatrix}.$$

Če z $D(x, y)$ označimo determinanto

$$D(x, y) = \det(H(x, y)) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$$

in je (x_0, y_0) stacionarna točka funkcije f, potem velja:

- če je $D(x_0, y_0) > 0$ in $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, je (x_0, y_0) lokalni minimum,
- če je $D(x_0, y_0) > 0$ in $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, je (x_0, y_0) lokalni maksimum,
- če je $D(x_0, y_0) < 0$, je (x_0, y_0) sedlo,
- če je $D(x_0, y_0) = 0$, potem nam kriterij ne pove ničesar (točka je lahko minimum, maksimum ali sedlo).

Naloga 86.
Podana je funkcija

$$f(x, y) = x^4 + 4xy + y^4 + 1.$$

a. Določi vse stacionarne točke funkcije f in jih klasificiraj.
b. Izračunaj smerni odvod funkcije v točki $(1, 1)$ v smeri vektorja $\vec{a} = (2, 2)$. Ali v tej smeri vrednosti funkcije f naraščajo ali padajo?

Naloga 87.
Dana je funkcija dveh spremenljivk

$$f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2 + 1}\ .$$

a. Skiciraj nivojnici $f(x, y) = c$ za $c = 0$ in $c = \frac{1}{4}$.
b. Izračunaj gradient funkcije f.
c. Določi vse stacionarne točke funkcije f in jih klasificiraj.

Naloga 88.
Dan je kvader s stranicami a, b in c z volumnom $V = 1$.

a. Zapiši površino kvadra kot funkcijo dveh stranic a in b.
b. Določi a in b tako, da bo površina kvadra največja možna.

Vezani ekstrem
Denimo, da iščemo ekstrem funkcije $f(x, y)$ pri pogoju $v(x, y) = 0$ (ta pogoj imenujemo *vez*). Predpostavimo še, da sta f in v parcialno odvedljivi in je $\operatorname{grad} v \neq 0$ za točke, v katerih je $v(x, y) = 0$. Definiramo funkcijo

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda v(x, y).$$

Potem lahko zgornji problem rešimo tako, da poiščemo ekstreme funkcije $F(x, y, \lambda)$.

Naloga 89.
Poišči minimum in maksimum funkcije $f(x, y) = xy$ na krivulji $3x^2 + y^2 = 6$.

Naloga 90.
Podano imamo funkcijo dveh spremenljivk

$$f(x, y) = 4x - 2y.$$

Določi najmanjšo in največjo vrednost, ki jo doseže med točkami (x, y) v ravnini, ki zadoščajo zvezi $x^2 + y^2 = 20$.

POGLAVJE 7

Integral

Osnovni pravili za računanje nedoločenih integralov

$$\int \alpha f(x)\ dx = \alpha \int f(x)\ dx$$

$$\int f(x) + g(x)\ dx = \int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx$$

Vpeljava nove spremenljivke

$$\int f(t(x))t'(x)\ dx = \int f(t)\ dt$$

NALOGA 91.
Naj bo

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}\ .$$

a. Določi stacionarne točke funkcije f.
b. Izračunaj nedoločeni integral

$$\int f(x)\ dx.$$

NALOGA 92.
Izračunaj nedoločeni integral

$$\int \frac{2x - \sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\ dx.$$

Integracija po delih (per partes)

$$\int u(x)v'(x)\ dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\ dx$$

NALOGA 93.
Izračunaj nedoločena integrala

a. $\displaystyle\int x\sin(x)\ dx,$
b. $\displaystyle\int x\sin(x^2)\ dx.$

NALOGA 94.
Naj bo

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

a. Izračunaj odvod funkcije f.

b. S pomočjo substitucije izračunaj nedoločeni integral

$$\int f(x)\ dx.$$

c. S pomočjo pravila za integriranje po delih izračunaj

$$\int \frac{x}{\sin^2 x}\ dx.$$

NALOGA 95.
Izračunaj nedoločena integrala

a. $\displaystyle\int \frac{4}{x^2+2x}\ dx,$

b. $\displaystyle\int x\log(x)\ dx.$

Newton-Leibnizova formula
Če je $F(x)$ katerikoli nedoločeni integral funkcije f, je

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a).$$

Lastnosti določenega integrala

$$\begin{aligned}\int_b^a f(x)\ dx &= -\int_a^b f(x)\ dx\\ \int_a^a f(x)\ dx &= 0\\ \int_a^b f(x)\ dx &= \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx\end{aligned}$$

Poleg tega veljajo analogna pravila kot za računanje nedoločenega integrala.

NALOGA 96.
Izračunaj integrala

a. $\displaystyle\int xe^{-\frac{x}{2}}\ dx,$

b. $\displaystyle\int_1^e \frac{\cos(\pi\log x)}{x}\ dx.$

Posplošeni integral
Če je funkcija $f\colon [a,\infty)\to\mathbb{R}$ zvezna, potem je

$$\int_a^\infty f(x)\ dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\ dx,$$

če integral in limita na desni obstajata za vse $t\geq a$.
Če je funkcija $f\colon (-\infty,a]\to\mathbb{R}$ zvezna, potem je

$$\int_{-\infty}^a f(x)\ dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^a f(x)\ dx,$$

če integral in limita na desni obstajata za vse $t\leq a$.

Naloga 97.

Z vpeljavo nove spremenljivke $t = \log x$ izračunaj integral

$$\int \frac{1}{x \log^2(x)}\, dx.$$

Če obstaja posplošeni integral $\displaystyle\int_e^{\infty} \frac{1}{x \log^2(x)}\, dx$, izračunaj njegovo vrednost.

Naloga 98.

Izračunaj nedoločeni integral funkcije

$$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\ .$$

Pomagaj si s substitucijo $t = \frac{1}{x}$. Ali obstaja kateri od integralov

$$\int_0^1 f(x)\, dx \quad \text{ali} \quad \int_1^{\infty} f(x)\, dx\ ?$$

Če obstaja, ga izračunaj.

POGLAVJE 8

Uporaba integrala

Ploščina območja pod grafom
Če je funkcija $y = f(x)$ integrabilna in pozitivna na intervalu $[a, b]$, potem je ploščina območja, ki ga omejujejo os x, graf funkcije f in premici $x = a$ ter $x = b$, enaka

$$S = \int_a^b f(x)\,dx.$$

NALOGA 99.
Določi ploščino območja med krivuljama $y = x + 1$ in $y = -x^2 + 3x + 4$.

NALOGA 100.
Dani sta funkciji $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$ in $g(x) = 2x - 1$.

a. Poišči vsa presečišča funkcij f in g.
b. Nariši skico omejenih območij, ki jih oklepata grafa funkcij f in g.
c. Kolikšna je skupna ploščina teh območij?

NALOGA 101.
Nariši lik, ki ga omejujeta krivulji $y = e^{2x}$ in $y = -e^{2x} + 4$ skupaj z osjo y, nato pa izračunaj ploščino tega lika.

NALOGA 102.
Izračunaj ploščino območja med grafoma funkcij

$$f(x) = x(1 - x) \quad \text{in} \quad g(x) = -2x.$$

NALOGA 103.
Izračunaj ploščino omejenega lika, ki ga omejujeta grafa funkcij $g(x)$ in $h(x)$ skupaj z ordinatno osjo, če je

$$g(x) = \sin x \quad \text{in} \quad h(x) = x - \pi.$$

NALOGA 104.
Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujejo vsi trije grafi funkcij $f(x) = 14-2x^2$, $g(x) = 9x^2+3$ in $h(x) = x^2 + 2$.

NALOGA 105.
Izračunaj ploščino, ki jo graf funkcije $f(x) = x \sin x$ oklepa z osjo x na intervalu od $[-\pi, \pi]$.

NALOGA 106.
Za funkcijo $f(x) = (x^2 - 1)e^x$

a. nariši graf,
b. izračunaj nedoločeni integral $\int f(x)\,dx$ in
c. določi ploščino območja, ki ga omejuje graf skupaj z osjo x.

NALOGA 107.
Naj bo

$$f(x) = (x + 1)(x - 2) \quad \text{in} \quad g(x) = (x + 1)(x - 2)(x + 3)^2.$$

a. Določi vsa presečišča grafov funkcij f in g.
b. Skiciraj grafa funkcij f in g.
c. Grafa funkcij f in g določata tri omejena območja v ravnini. Izračunaj skupno ploščino omejenih območij.

Naloga 108.
Z uvedbo ustrezne nove spremenljivke izračunaj integral

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

Nato izračunaj ploščino lika pod grafom funkcije $f(x) = x^2 \sin x$ na intervalu $[0, \pi]$.

Naloga 109.
Dana je funkcija $f(x) = (x-1)e^{-x}$.

a. Izračunaj nedoločeni integral

$$\int f(x)\, dx.$$

b. Izračunaj posplošeni integral

$$\int_0^\infty f(x)\, dx.$$

c. Kolikšna je ploščina območja, ki ga graf funkcije oklepa z osjo x na intervalu $[0, \infty)$?

Dolžina loka
Dolžina loka vzdolž grafa funkcije f med $x = a$ in $x = b$ je enaka

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Naloga 110.
Dane so funkcije

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad g(x) = \frac{x^2}{2} \quad \text{in} \quad h(x) = \log\frac{e^x+1}{e^x-1}.$$

a. Izračunaj ploščino območja med krivuljama z enačbama $y = f(x)$ in $y = g(x)$.
b. Izračunaj dolžino grafa funkcije h nad intervalom $[\log 2, \log 4]$.

Naloga 111.
Dana je krivulja

$$f(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}.$$

Izračunaj dolžino loka grafa te krivulje na intervalu $[1, 2]$.

Volumen vrtenine
Volumen vrtenine, ki jo dobimo, če graf funkcije f na intervalu $[a, b]$ zavrtimo okrog osi x, je enak

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2\, dx.$$

Naloga 112.
Dani sta funkciji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $g\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ s predpisoma

$$f(x) = \frac{1}{e^x+1} \quad \text{in} \quad g(x) = \frac{\sqrt{2x}}{1+x^2}.$$

a. Izračunaj nedoločeni integral:

$$\int f(x)\ dx.$$

b. Območje med grafom funkcije g in abscisno osjo zavrtimo okoli abscisne osi in dobimo neomejeno telo D. Prepričaj se, da ima telo D končno prostornino, nato pa jo še izračunaj.

Naloga 113.

Podani sta krivulji $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$ in $g(x) = 6x - 4$.

a. Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujeta ti dve krivulji.
b. Izračunaj volumen telesa, ki ga dobimo z vrtenjem lika iz točke (a) okrog osi x.

Naloga 114.

Izračunaj prostornino vrtenine, ki jo dobimo, če funkcijo

$$f(x) = \frac{1}{\log(x)\sqrt{x}}$$

zavrtimo okoli osi x na intervalu $[e, \infty)$.

Pot, hitrost, pospešek

Hitrost je odvod poti po času, pospešek je odvod hitrosti po času. Hitrost je ploščina pod grafom pospeška, pot je ploščina pod grafom hitrosti. Z enačbami:

$$\begin{aligned} v(t) &= \dot{s}(t), \\ a(t) &= \dot{v}(t), \\ s(t) &= \int_{t_0}^{t} v(\tau)\ d\tau, \\ v(t) &= \int_{t_0}^{t} a(\tau)\ d\tau. \end{aligned}$$

Pri tem $\dot{}$ označuje odvod po času.

Naloga 115.

Kolesar v zaključku dirke vozi s hitrostjo 7 m/s, potem pa začne pospeševati. Njegovo hitrost v prvih treh sekundah pospeševanja opiše enačba

$$v(t) = 7 + \frac{1}{3}t^2.$$

Kolikšno pot opravi v teh treh sekundah, če velja

$$\dot{s}(t) = v(t),$$

kjer je $s(t)$ pot, ki jo kolesar prevozi v času t od začetka pospeševanja? Kakšno hitrost ima po treh sekundah, ko preneha s pospeševanjem?

Rešitve

1. Indukcija

Rešitev naloge 1.

Najprej preverimo, da trditev velja za $n = 2$ (baza indukcije). Pri $n = 2$ je zadnji člen na levi strani enak $2 \cdot 2 - 1 = 3$ in res je

$$1 + 3 = 4 = 2^2,$$

torej za $n = 2$ trditev velja. Pri indukcijskem koraku bomo pokazali, da trditev velja za $n + 1$, če predpostavimo, da velja za n. Po indukcijski predpostavki je torej

$$1 + 3 + \cdots + (2n - 3) + (2n - 1) = n^2.$$

Izračunamo

$$\begin{aligned} 1 + 3 + \cdots + (2(n+1) - 3) + (2(n+1) - 1) &= 1 + 3 + \cdots + (2n - 1) + (2n + 1) = \\ &= n^2 + (2n + 1) = \\ &= n^2 + 2n + 1 = \\ &= (n + 1)^2. \end{aligned}$$

Pri tem smo iz prve v drugo vrstico prišli tako, da smo uporabili indukcijsko predpostavko, s katero smo prvih n členov vsote zamenjali z n^2.

Rešitev naloge 2.

Najprej preverimo, da trditev velja za $n = 1$ (baza indukcije). Leva stran je enaka $1 \cdot 4 = 4$, desna pa

$$\frac{(3-1) \cdot 4^2}{9} = \frac{2 \cdot 16}{9} = \frac{32}{9} = 3 + \frac{5}{9}\,.$$

Ker je $4 \geq 3 + \frac{5}{9}$, trditev za $n = 1$ velja. Zdaj pa predpostavimo, da trditev velja za n, in jo dokažemo za $n + 1$ (indukcijski korak). Velja torej indukcijska predpostavka

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^3 + \cdots + n \cdot 4^n > \frac{(3n-1) \cdot 4^{n+1}}{9}\,.$$

Izračunamo

$$\begin{aligned}
1\cdot 4+2\cdot 4^2+\cdots+n\cdot 4^n+(n+1)\cdot 4^{n+1} &> \frac{(3n-1)\cdot 4^{n+1}}{9}+(n+1)\cdot 4^{n+1}= \\
&= \frac{(3n-1)\cdot 4^{n+1}+9(n+1)\cdot 4^{n+1}}{9}= \\
&= \frac{(3n-1)+9(n+1)}{9}\cdot 4^{n+1}= \\
&= \frac{12n+8}{9}\cdot 4^{n+1}= \\
&= \frac{4(3n+2)}{9}\cdot 4^{n+1}= \\
&= \frac{(3(n+1)-1)\cdot 4^{n+2}}{9}.
\end{aligned}$$

Vidimo, da ob uporabi indukcijske predpostavke trditev velja tudi za $n+1$.

Rešitev naloge 3.

Pri $n=1$ (baza indukcije) je edini člen na levi strani

$$\frac{1}{2\cdot 4}=\frac{1}{8},$$

in ker je tudi

$$\frac{1\cdot(5\cdot 1+13)}{12(1+2)(1+3)}=\frac{18}{12\cdot 3\cdot 4}=\frac{1}{8},$$

enakost za $n=1$ velja. Indukcijski korak bomo naredili tako, da bomo ob predpostavki, da trditev velja za n, dokazali, da velja tudi za $n+1$. Po indukcijski predpostavki je torej

$$\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{4\cdot 6}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+3)}=\frac{n(5n+13)}{12(n+2)(n+3)}.$$

Izračunamo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+3)}+\frac{1}{(n+2)(n+4)}&= \\
&= \frac{n(5n+13)}{12(n+2)(n+3)}+\frac{1}{(n+2)(n+4)}= \\
&= \frac{n(5n+13)(n+4)+12(n+3)}{12(n+2)(n+3)(n+4)}= \\
&= \frac{5n^3+33n^2+64n+36}{12(n+2)(n+3)(n+4)}= \\
&= \frac{(5n+18)(n+1)(n+2)}{12(n+2)(n+3)(n+4)}= \\
&= \frac{(5n+18)(n+1)}{12(n+3)(n+4)}= \\
&= \frac{(5(n+1)+13)(n+1)}{12((n+1)+2)((n+1)+3)},
\end{aligned}$$

in vidimo, da trditev velja tudi za $n+1$. Pri tem smo pri prvem enačaju vse sumande razen zadnjega zamenjali z desno stranjo indukcijske predpostavke.

Poleg tega smo morali izraz $5n^3+33n^2+64n+36$ zapisati kot produkt. To lahko naredimo tako, da uganemo eno ničlo. Ker iz stopenj polinomov sklepamo, da se bo en člen na koncu pokrajšal, so smiselni kandidati -2, -3 in -4. Vrednosti lahko hitro izračunamo s pomočjo Hornerjevega algoritma in hkrati dobimo razcep

$$5n^3 + 33n^2 + 64n + 36 = (n+2)(5n^2 + 23n + 18).$$

Drugi faktor lahko zapišemo kot

$$5n^2 + 23n + 18 = 5n^2 + 18n + 5n + 18 = n(5n+18) + (5n+18) = (5n+18)(n+1),$$

seveda pa bi lahko uporabili tudi formulo za korene kvadratne enačbe.

S tem smo izračunali delne vsote s_n vrste $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+3)}$. Ker je

$$s_n = \frac{n(5n+13)}{12(n+2)(n+3)}$$

in je $\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{5}{12}$, zgornja vrsta konvergira in njena vsota je $\frac{5}{12}$.

Rešitev naloge 4.

Pri $n = 1$ (baza indukcije) ima izraz vrednost $7^1 + 5 = 12$ in je seveda deljiv s 3. Za indukcijski korak bomo predpostavili, da 3 deli $7^n + 5$ (indukcijska predpostavka), in dokazali, da potem deli tudi $7^{n+1} + 5$. Indukcijska predpostavka torej pravi, da je $7^n + 5 = 3k$ za neko celo število k. Zato je

$$\begin{aligned} 7^{n+1} + 5 &= 7 \cdot 7^n + (7-6) \cdot 5 = \\ &= 7 \cdot 7^n + 7 \cdot 5 - 30 = \\ &= 7(7^n + 5) - 30 = \\ &= 7 \cdot 3k - 30 = \\ &= 3(7k - 10). \end{aligned}$$

Vidimo, da je (če velja indukcijska predpostavka) tudi izraz $7^{n+1} + 5$ deljiv s 3.

Rešitev naloge 5.

Pri $n = 0$ (baza indukcije) dobimo $7 \cdot 0^3 - 0 = 0$, kar je res deljivo s 6. Predpostavimo še, da trditev velja za n in dokažimo, da potem velja tudi za $n+1$ (indukcijski korak). Po indukcijski predpostavki lahko torej pišemo $7n^3 - n = 6k$ za neko celo število k. Potem pa je

$$\begin{aligned} 7(n+1)^3 - (n+1) &= 7(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - n - 1 = \\ &= 7n^3 - n + 21n^2 + 21n + 6 = \\ &= 6k + 6 + 3 \cdot 7 \cdot n(n+1). \end{aligned}$$

Prva dva sumanda sta očitno deljiva s 6. Tretji sumand je očitno deljiv s 3. Ker pa sta n in $n+1$ dve zaporedni naravni števili, je eno od njiju gotovo sodo, zato je tretji sumand deljiv tudi z 2. Sklepamo, da je torej tudi tretji sumand deljiv s 6. Ker je izraz $7(n+1)^3 - (n+1)$ vsota treh števil, ki so deljiva s 6, je seveda tudi sam deljiv s 6, kar smo želeli pokazati.

Rešitev naloge 6.

Pri $n = 1$ (baza indukcije) dobimo $7^2 + 8^1 = 49 + 8 = 57 = 3 \cdot 19$, kar je deljivo z 19. Predpostavimo, da trditev velja za n in pokažimo, da v tem primeru velja tudi za $n+1$

(indukcijski korak). Naj bo torej $7^{n+1} + 8^{2n-1} = 19k$ za neko celo število k. Tedaj je

$$\begin{aligned}
7^{n+2} + 8^{2n+1} &= 7 \cdot 7^{n+1} + 8^2 \cdot 8^{2n-1} = \\
&= 7 \cdot 7^{n+1} + 7 \cdot 8^{2n-1} - 7 \cdot 8^{2n-1} + 64 \cdot 8^{2n-1} = \\
&= 7(7^{n+1} + 8^{2n-1}) + 8^{2n-1}(-7 + 64) = \\
&= 7 \cdot 19k + 8^{2n-1} \cdot 57 = \\
&= 7 \cdot 19k + 8^{2n-1} \cdot 3 \cdot 19 = \\
&= 19(7k + 3 \cdot 8^{2n-1}).
\end{aligned}$$

Vidimo, da je izraz pri $n + 1$ spet deljiv z 19.

Rešitev naloge 7.

Ker je vsak člen zaporedja odvisen od dveh prejšnjih, moramo za bazo indukcije preveriti, da trditev velja za dve zaporedni naravni števili. Naj bo $n = 0$. Potem je

$$3^0 - 1 = 1 - 1 = 0 = a_0.$$

Pri $n = 1$ pa velja

$$3^1 - 1 = 3 - 1 = 2 = a_1.$$

Za indukcijski korak bomo predpostavili, da trditev velja za $n - 2$ in $n - 1$ in dokazali, da velja tudi za n:

$$\begin{aligned}
a_n &= 4a_{n-1} - 3a_{n-2} = \\
&= 4(3^{n-1} - 1) - 3(3^{n-2} - 1) = \\
&= 4 \cdot 3^{n-1} - 4 - 3 \cdot 3^{n-2} + 3 = \\
&= 4 \cdot 3^{n-1} - 3^{n-1} - 1 = \\
&= 3 \cdot 3^{n-1} - 1 = \\
&= 3^n - 1.
\end{aligned}$$

2. Kompleksna števila

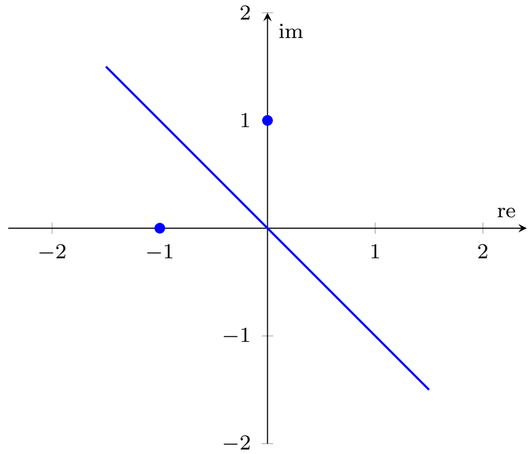
Rešitev naloge 8.

Nalogo lahko rešimo z geometrijskim premislekom. Točke, ki ustrezajo enačbi, so enako oddaljene od števil i in -1. Gre torej za točke na simetrali daljice od i do -1. Simetrala poteka skozi točko $\frac{-1+i}{2}$ in ima smerni koeficient -1. Enačba simetrale je torej

$$y - \frac{1}{2} = -1 \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)$$

oziroma $y = -x$. Seveda pa lahko tudi pišemo $z = x + iy$, vstavimo v enačbo in dobimo:

$$\begin{aligned}
|z - i| &= |z + 1|, \\
|x + iy - i| &= |x + iy + 1|, \\
|x + i(y - 1)| &= |(x + 1) + iy|, \\
\sqrt{x^2 + (y - 1)^2} &= \sqrt{(x + 1)^2 + y^2}, \\
x^2 + (y - 1)^2 &= (x + 1)^2 + y^2, \\
x^2 + y^2 - 2y + 1 &= x^2 + 2x + 1 + y^2, \\
-2y &= 2x, \\
y &= -x.
\end{aligned}$$



Rešitev naloge 9.

Pišimo $z = x + iy$. Potem je

$$\begin{aligned} z(\overline{z} + i) &= 1 + i, \\ (x + iy)(x - iy + i) &= 1 + i, \\ x^2 - ixy + ix + ixy + y^2 - y &= 1 + i, \\ x^2 + ix + y^2 - y &= 1 + i. \end{aligned}$$

Dve kompleksni števili sta enaki natanko tedaj, ko imata enaki realni komponenti in enaki imaginarni komponenti. Torej je

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - y &= 1, \\ x &= 1. \end{aligned}$$

Ko vstavimo $x = 1$ v prvo enačbo, dobimo $y^2 - y = 0$ oziroma $y_1 = 0$, $y_2 = 1$. Rešitvi sta torej $z_1 = 1$ in $z_2 = 1 + i$.

Rešitev naloge 10.

Pišimo $z = x + iy$. Ker je $z\overline{z} = |z|^2 = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$, dobimo iz dane enačbe naslednji dve enakosti:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 3x &= 0, \\ -3y &= 3\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Iz druge enakosti izrazimo $y = -\sqrt{2}$ in to vstavimo v prvo enakost:

$$\begin{aligned} x^2 + (-\sqrt{2})^2 - 3x &= 0, \\ x^2 - 3x + 2 &= 0, \\ (x - 2)(x - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Dobimo $x_1 = 2$ in $x_2 = 1$. Rešitvi sta torej $z_1 = 2 - i\sqrt{2}$ in $z_2 = 1 - i\sqrt{2}$.

Rešitev naloge 11.

a. Ker so koeficienti realna števila, lahko enačbo rešimo s pomočjo formule za rešitve kvadratne enačbe. Dobimo

$$z_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4} = -\frac{1}{4} \pm \frac{i\sqrt{3}}{4}.$$

b. Označimo rešitev, ki leži v tretjem kvadrantu z w. Potem je

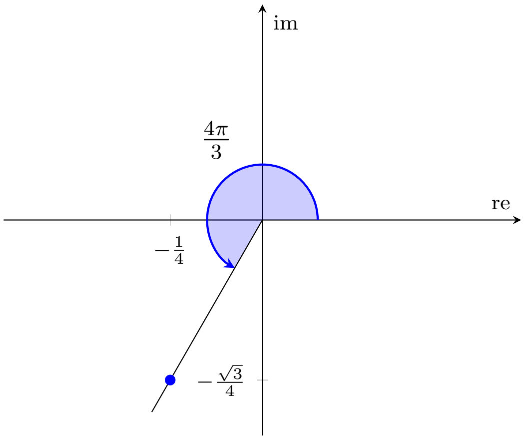
$$w = -\frac{1}{4} - \frac{i\sqrt{3}}{4}$$

in iščemo w^3. Izračunamo

$$|w| = \sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{3}{16}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

in

$$\arg(w) = \arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right) = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}.$$



Zato je

$$w^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 e^{i\cdot 3\cdot \frac{4\pi}{3}} = \frac{1}{8} e^{i\cdot 4\pi} = \frac{1}{8}.$$

Rešitev naloge 12.

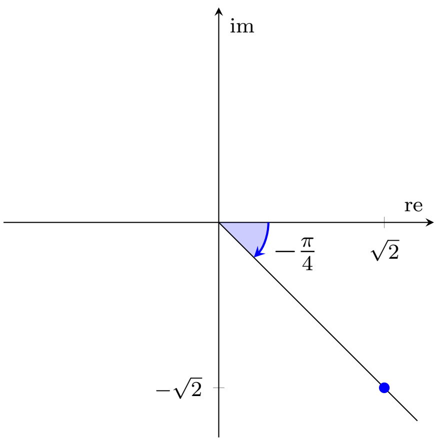
Pišimo $z = re^{i\varphi}$ in $w = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$. Iščemo vse z, ki rešijo enačbo $z^4 = w$. Izračunamo

$$|w| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{4} = 2,$$

$$\arg(w) = \arctan\left(\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{\pi}{4},$$

in

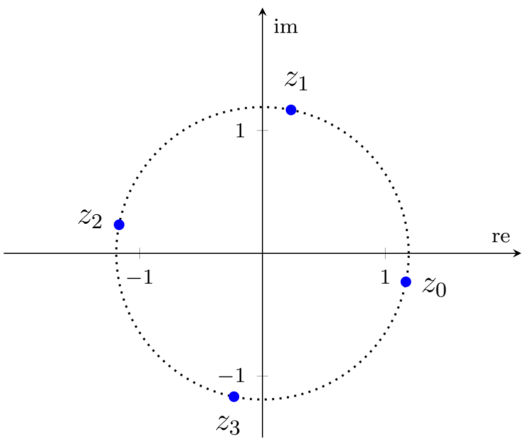
$$z^4 = r^4\, e^{i\cdot 4\varphi}.$$



Zato je $r^4 = 2$ in $4\varphi = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$ oziroma $r = \sqrt[4]{2}$ in $\varphi_k = -\frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{2}$ za $k = 0, 1, 2, 3$. Dobimo štiri rešitve:

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[4]{2} e^{i\left(-\frac{\pi}{16}\right)}, \\ z_1 &= \sqrt[4]{2} e^{i\left(\frac{7\pi}{16}\right)}, \\ z_2 &= \sqrt[4]{2} e^{i\left(\frac{15\pi}{16}\right)}, \\ z_3 &= \sqrt[4]{2} e^{i\left(\frac{23\pi}{16}\right)}. \end{aligned}$$

Če rešitve narišemo v kompleksni ravnini, vidimo, da ležijo na krožnici z radijem $\sqrt[4]{2}$ in so oglišča kvadrata.



Rešitev naloge 13.

a. Števec in imenovalec pomnožimo z $7 + i\sqrt{3}$ in dobimo

$$\begin{aligned} w &= \frac{4\sqrt{3} + 2i}{7 - i\sqrt{3}} = \frac{(4\sqrt{3} + 2i)(7 + i\sqrt{3})}{(7 - i\sqrt{3})(7 + i\sqrt{3})} = \\ &= \frac{28\sqrt{3} + 12i + 14i - 2\sqrt{3}}{49 + 3} = \\ &= \frac{26\sqrt{3} + 26i}{52} = \frac{\sqrt{3} + i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i. \end{aligned}$$

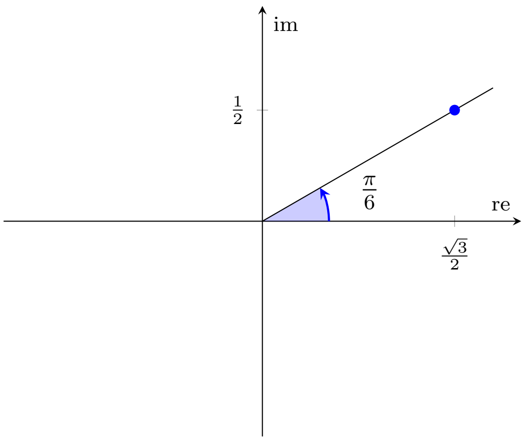
Zato je $\mathrm{re}(w) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ in $\mathrm{im}(w) = \frac{1}{2}$.

b. Izračunati moramo

$$|w| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$$

in

$$\arg(w) = \arctan\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}.$$



Dobimo $w = e^{i\frac{\pi}{6}}$.

c. Najprej izračunamo $w^2 = e^{i\frac{\pi}{3}}$. Zapišemo $z = re^{i\varphi}$. Potem je $z^3 = r^3 e^{i\cdot 3\varphi}$, zato je $r^3 = 1$ in $3\varphi = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ oziroma $r = 1$ in

$$\varphi_k = \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3},$$

za $k = 0, 1, 2$. Dobimo $\varphi_1 = \frac{\pi}{9}$, $\varphi_2 = \frac{7\pi}{9}$ in $\varphi_3 = \frac{13\pi}{9}$, zato so rešitve

$$\begin{aligned} z_0 &= e^{i\frac{\pi}{9}}, \\ z_1 &= e^{i\frac{7\pi}{9}}, \\ z_2 &= e^{i\frac{13\pi}{9}}. \end{aligned}$$

Rešitev naloge 14.

a. Števec in imenovalec pomnožimo z $1 + i$ in dobimo

$$w = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i+i-1}{1+1} = \frac{2i}{2} = i.$$

Torej je $\mathrm{re}(w) = 0$ in $\mathrm{im}(w) = 1$.

b. Očitno je $|w| = 1$, $\arg(w) = \frac{\pi}{2}$ in $w = e^{i\frac{\pi}{2}}$.

c. Označimo $z = re^{i\varphi}$. Potem je $r = 1$ in $2\varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ oziroma $\varphi = \frac{\pi}{4} + \pi k$ za $k = 0, 1$. Dobimo torej $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$ in $\varphi_1 = \frac{5\pi}{4}$. Rešitvi sta

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{in} \quad z_1 = e^{i\frac{5\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Rešitev naloge 15.

a. Števec in imenovalec pomnožimo s $3 + i$ in dobimo

$$w = \frac{4+2i}{3-i} = \frac{(4+2i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{12+4i+6i-2}{9+1} = \frac{10+10i}{10} = 1+i.$$

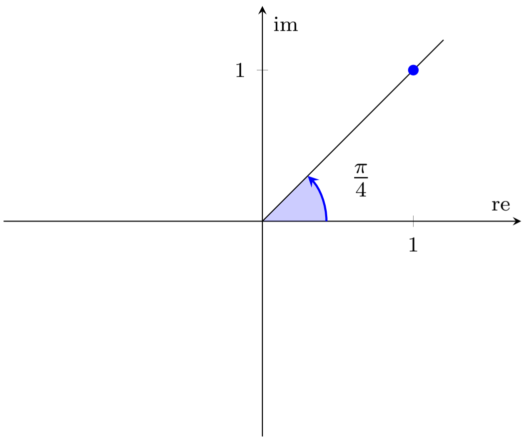
Torej je $\mathrm{re}(w) = 1$ in $\mathrm{im}(w) = 1$.

b. Izračunamo

$$|w| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

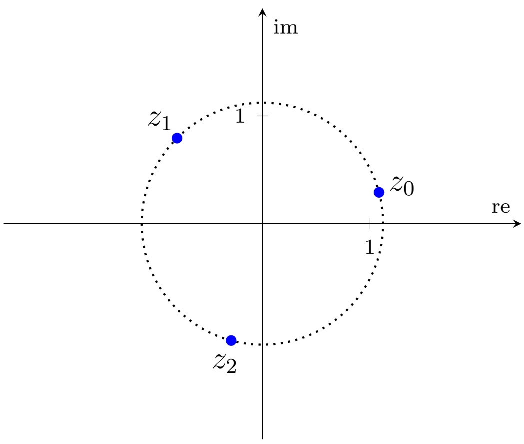
in

$$\arg(w) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$



Torej je $w = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

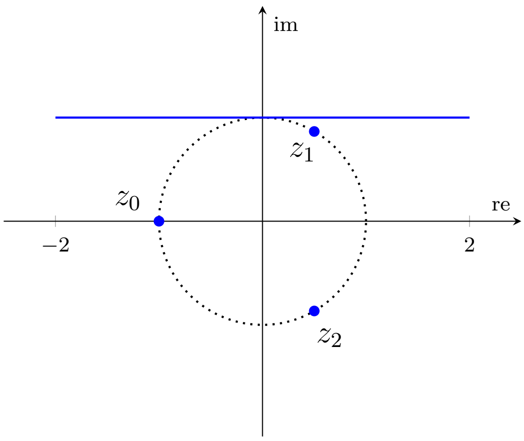
c. Pišimo $z = re^{i\varphi}$. Potem je $r = \sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2}$ in $3\varphi_k = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ oziroma $\varphi_k = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}$ za $k = 0, 1, 2$. Dobimo $\varphi_0 = \frac{\pi}{12}$, $\varphi_1 = \frac{9\pi}{12}$ in $\varphi_2 = \frac{17\pi}{12}$. Rešitve ležijo na krožnici z radijem $\sqrt[6]{2}$ in so oglišča enakostraničnega trikotnika.



Rešitev naloge 16.

Tudi v kompleksnih številih velja, da je produkt enak nič natanko takrat, ko je vsaj eden od faktorjev enak 0. Torej mora veljati $z^3 = -1$ ali pa $z - \bar{z} = 2i$. Prvo enačbo lahko rešimo po standarnem postopku s pomočjo polarnega zapisa, lahko pa vse tri rešitve kar uganemo. Ena rešitev je očitno $z_0 = -1$ s polarnim kotom π. Ostali dve rešitvi morata s skupaj z z_0 tvoriti enakostranični trikotnik, zato sta njuna polarna kota za $\frac{2\pi}{3}$ stran. Torej je $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$ in $z_2 = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

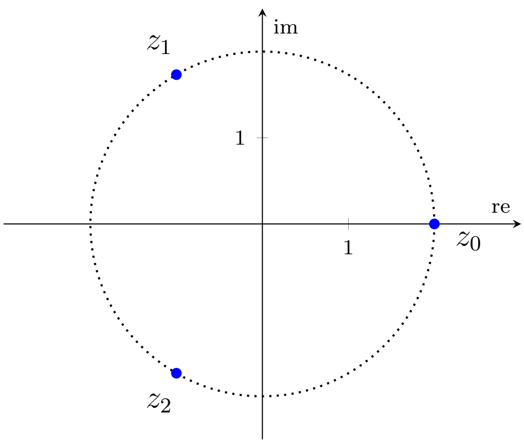
V drugo enačbo vstavimo $z = x + iy$ in dobimo $x + iy - (x - iy) = 2i$ oziroma $2iy = 2i$. Torej je $y = 1$, x pa poljuben. Rešitve so v tem primeru $z_x = x + i$ za vse $x \in \mathbb{R}$. Množico rešitev še narišemo.



Rešitev naloge 17.

a. Rešitve prve enačbe imajo v polarnih koordinatah radij 2, za kote pa velja $3\varphi = 2\pi k$ za $k = 0, 1, 2$. Dobimo torej $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = \frac{2\pi}{3}$ in $\varphi_2 = \frac{4\pi}{3}$, rešitve pa so

$$z_0 = 2, \quad z_1 = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{in} \quad z_2 = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$



b. Označimo $z^3 = w$ in dobimo

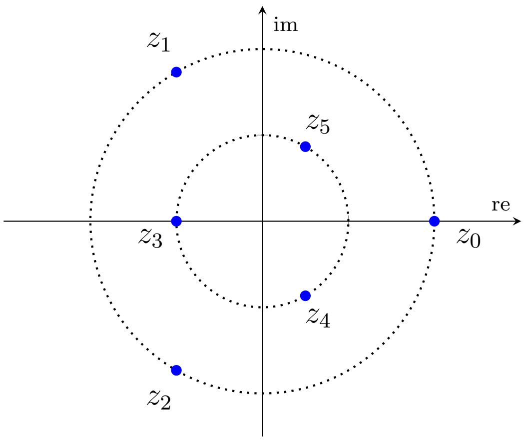
$$z^6 - 7z^3 - 8 = w^2 - 7w - 8 = (w+1)(w-8) = 0.$$

Enačba ima rešitvi $w_0 = -1$ in $w_1 = 8$. Enačbi $z^3 = w_1$ zadoščajo števila

$$z_0 = 2, \quad z_1 = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{in} \quad z_2 = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

ki smo jih izračunali pri prejšnji točki. Rešitve enačbe $z^3 = w_0$ lahko dobimo tako, da rešitve enačbe $z^3 = w_1$ delimo z -2. Rešitve so torej števila

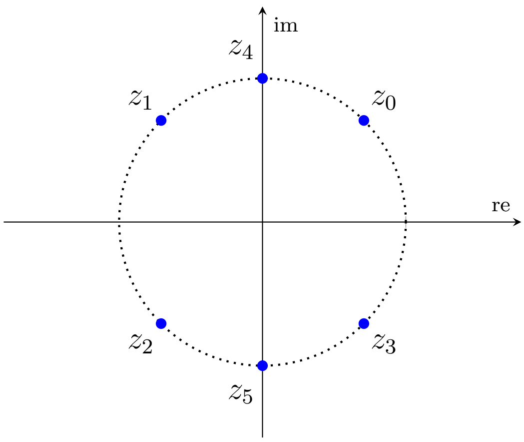
$$z_3 = -1, \quad z_4 = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{in} \quad z_5 = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$



Rešitev naloge 18.

Ločimo dva primera. Prva možnost je, da je $z^2 = -1$, druga pa, da je $z^4 = -1$. Rešitvi v prvem primeru sta seveda $z_4 = i$ in $z_5 = -i$. V drugem primeru polarni koti rešitev ustrezajo enačbi $4\varphi = \pi + 2\pi k$ za $k = 0, 1, 2, 3$, torej je $\varphi_k = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$. Rešitve so števila

$$
\begin{aligned}
z_0 &= \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, \\
z_1 &= -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, \\
z_2 &= -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}, \\
z_3 &= \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}
$$



Rešitev naloge 19.

Očitno je $|z| = 8$ in $\arg(z) = \pi$, zato je $z = 8e^{i\pi}$. Pišimo $w = re^{i\varphi}$. Potem je $r^4 = 8$ in $4\varphi_k = \pi + 2\pi k$ oziroma $r = \sqrt[4]{8}$ in $\varphi_k = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$ za $k = 0, 1, 2, 3$. Dobimo rešitve

$$
\begin{aligned}
w_0 &= \sqrt[4]{8}e^{i\frac{\pi}{4}}, \\
w_1 &= \sqrt[4]{8}e^{i\frac{3\pi}{4}}, \\
w_2 &= \sqrt[4]{8}e^{i\frac{5\pi}{4}}, \\
w_3 &= \sqrt[4]{8}e^{i\frac{7\pi}{4}}.
\end{aligned}
$$

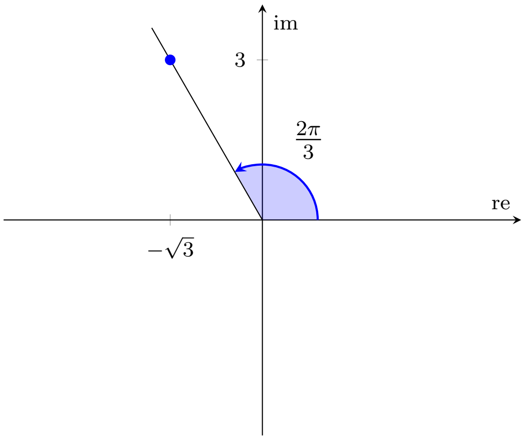
Rešitev naloge 20.

a. Izračunamo

$$|w| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

in

$$\arg(w) = \arctan\left(\frac{3}{-\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}.$$



Torej je

$$w^7 = (2\sqrt{3})^7 e^{i\frac{14\pi}{3}} = 128 \cdot 27\sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}} = 3456\sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

b. Pišimo $z = x + iy$. Potem je $|z| + z = \sqrt{x^2+y^2} + x + iy = 2 + i$, torej je

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+y^2} + x &= 2, \\ y &= 1. \end{aligned}$$

Vstavimo $y = 1$ v prvo enačbo in dobimo

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+1} + x &= 2, \\ \sqrt{x^2+1} &= 2 - x, \\ x^2 + 1 &= (2-x)^2, \\ x^2 + 1 &= 4 - 4x + x^2, \\ 4x &= 3, \\ x &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Rešitev je torej $z = \frac{3}{4} + i$.

Rešitev naloge 21.

a. Enačbo prepišemo v

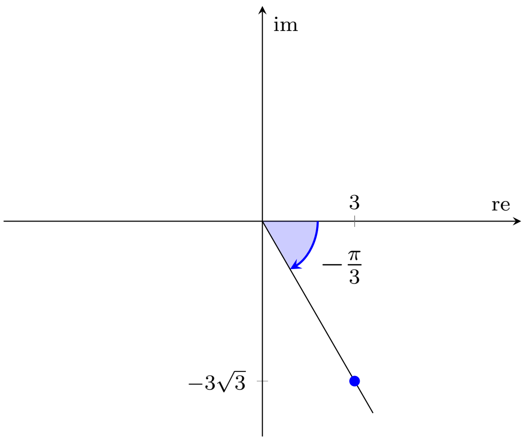
$$z^3 = 3 - 3\sqrt{3}i.$$

Izračunamo

$$|3 - 3\sqrt{3}i| = \sqrt{3^2 + (-3\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+27} = \sqrt{36} = 6$$

in

$$\arg(3 - 3\sqrt{3}i) = \arctan\left(\frac{-3\sqrt{3}}{3}\right) = \arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}.$$



Naj bo $z = re^{i\varphi}$. Potem je $r^3 = 6$ in $3\varphi_k = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$. Torej je $r = \sqrt[3]{6}$ in $\varphi_k = -\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}$ za $k = 0, 1, 2$. Dobimo

$$\varphi_0 = -\frac{\pi}{9}, \quad \varphi_1 = \frac{5\pi}{9} \quad \text{in} \quad \varphi_2 = \frac{11\pi}{9}.$$

Rešitve so torej

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[3]{6}e^{i\left(-\frac{\pi}{9}\right)}, \\ z_1 &= \sqrt[3]{6}e^{i\frac{5\pi}{9}}, \\ z_2 &= \sqrt[3]{6}e^{i\frac{11\pi}{9}}. \end{aligned}$$

b. Če je w rešitev enačbe $z^3 = 3 - 3\sqrt{3}i$, potem je $w^3 = 3 - 3\sqrt{3}i$ ne glede na to, ali gre za rešitev z najmanjšim polarnim kotom ali katerokoli drugo.

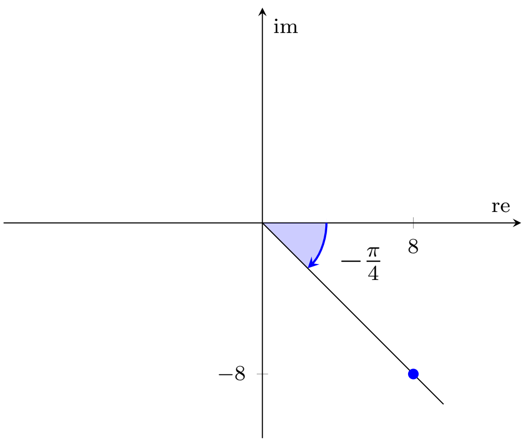
Rešitev naloge 22.

a. Izračunamo

$$|w| = \sqrt{8^2 + (-8)^2} = \sqrt{2 \cdot 8^2} = 8\sqrt{2}$$

in

$$\arg(w) = \arctan\left(\frac{-8}{8}\right) = -\frac{\pi}{4}.$$



Torej je

$$w^4 = (8\sqrt{2})^4 e^{i\cdot 4\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = 8^4 \cdot 2^2 \cdot e^{-i\pi} = -2^{14}.$$

b. Pišimo $z = re^{i\varphi}$. Potem je $r^3 = 8\sqrt{2}$ in $3\varphi_k = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$. Zato je $r = 2\sqrt[6]{2}$ in $\varphi_k = -\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}$ za $k = 0, 1, 2$. Dobimo

$$\varphi_0 = -\frac{\pi}{12}, \quad \varphi_1 = \frac{7\pi}{12} \quad \text{in} \quad \varphi_2 = \frac{15\pi}{12}.$$

Rešitve so torej

$$\begin{aligned} z_0 &= 2\sqrt[6]{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{12}\right)}, \\ z_1 &= 2\sqrt[6]{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}, \\ z_2 &= 2\sqrt[6]{2}e^{i\frac{15\pi}{12}}. \end{aligned}$$

Rešitev naloge 23.

Rešimo najprej enačbo $z^4 = -4$. Če je $z = re^{i\varphi}$, potem je $r = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$ in $4\varphi_k = \pi + 2\pi k$, torej je $\varphi_k = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$ za $k = 0, 1, 2, 3$. Dobimo

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{4}, \quad \varphi_1 = \frac{3\pi}{4}, \quad \varphi_2 = \frac{5\pi}{4} \quad \text{in} \quad \varphi_3 = \frac{7\pi}{4}.$$

Rešitve druge enačbe so torej

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \\ z_1 &= \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \\ z_2 &= \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \\ z_3 &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right). \end{aligned}$$

Očitno je $\overline{z_0} = z_3$ in $\overline{z_1} = z_2$. Ker je enačba $z\overline{z} = z + \overline{z}$ invariantna za konjugiranje, bo z_0 rešitev natanko tedaj, ko bo z_3 rešitev, in z_1 rešitev natanko tedaj, ko bo z_2 rešitev. Zlahka se prepričamo, da z_0 zadošča prvi enačbi, z_1 pa ne. Torej sta iskani rešitvi z_0 in z_3.

Rešitev naloge 24.

Enačbo pomnožimo z $-i$ in dobimo

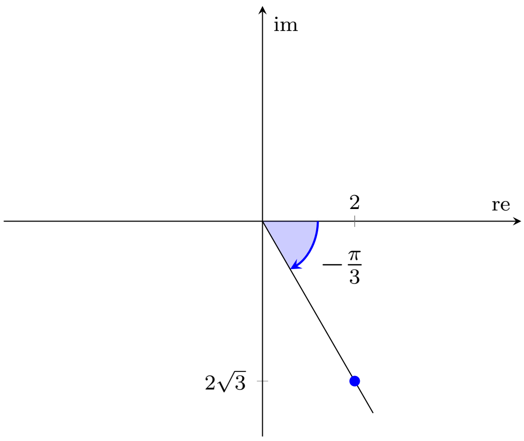
$$z^3 = 2 - 2\sqrt{3}i.$$

Označimo $w = 2 - 2\sqrt{3}i$. Potem je

$$|w| = \sqrt{2^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$$

in

$$\arg(w) = \arctan\left(\frac{-2\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}.$$



Če pišemo $z = re^{i\varphi}$, potem je $r^3 = 4$ in $3\varphi_k = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$ oziroma $r = \sqrt[3]{4}$ in $\varphi_k = -\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}$ za $k = 0, 1, 2$. Dobimo

$$\varphi_0 = -\frac{\pi}{9}, \quad \varphi_1 = \frac{5\pi}{9} \quad \text{in} \quad \varphi_2 = \frac{11\pi}{9}.$$

Rešitve so torej

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[3]{4}e^{i\left(-\frac{\pi}{9}\right)}, \\ z_1 &= \sqrt[3]{4}e^{i\frac{5\pi}{9}}, \\ z_2 &= \sqrt[3]{4}e^{i\frac{11\pi}{9}}. \end{aligned}$$

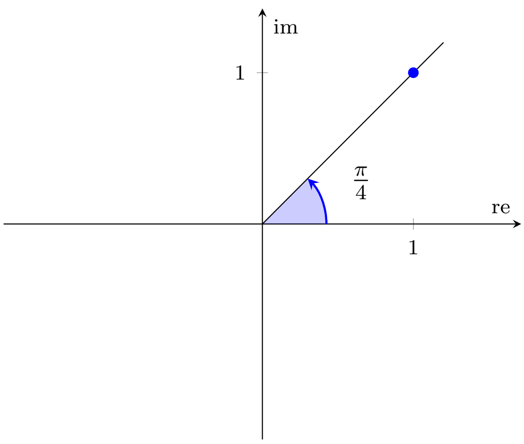
Rešitev naloge 25.

a. Najprej izpostavimo a na levi strani in dobimo $a(3-2i) = 5+i$. Delimo z $3-2i$ in izraz poenostavimo:

$$a = \frac{5+i}{3-2i} = \frac{(5+i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{15+10i+3i-2}{9+4} = \frac{13+13i}{13} = 1+i.$$

b. Izračunamo $|a| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ in

$$\arg(a) = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

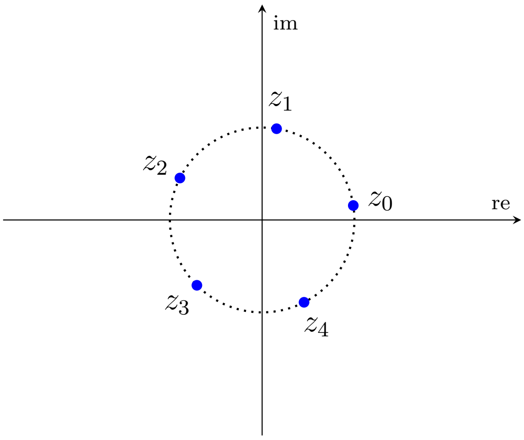


Torej je $a = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

c. Pišimo $z = re^{i\varphi}$. Potem je $r^5 = \sqrt{2}$ in $5\varphi_k = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, oziroma $r = \sqrt[10]{2}$ in $\varphi_k = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5}$ za $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Dobimo

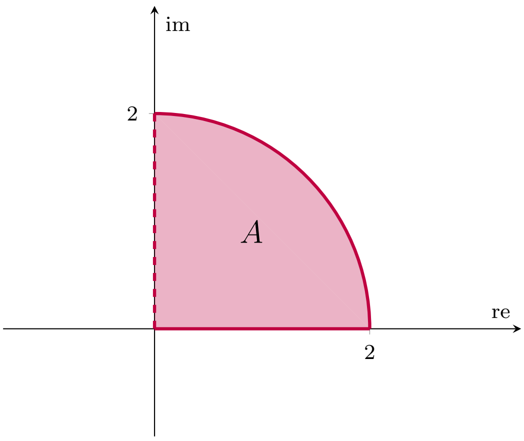
$$\varphi_0 = \frac{\pi}{20}, \quad \varphi_1 = \frac{9\pi}{20}, \quad \varphi_2 = \frac{17\pi}{20}, \quad \varphi_3 = \frac{25\pi}{20}, \quad \varphi_4 = \frac{33\pi}{20}.$$

Rešitve $z_k = re^{i\varphi_k}$ ležijo na krožnici z radijem $\sqrt[10]{2}$ in tvorijo oglišča pravilnega petkotnika.



Rešitev naloge 26.

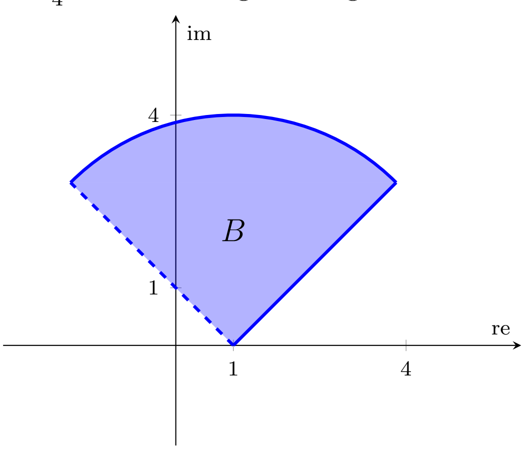
a. V množici A so kompleksna števila, ki imajo polarni kot med (vključno) 0 in $\frac{\pi}{2}$ in ležijo znotraj ali na robu krožnice z radijem 2.



b. Transformacijo $z \mapsto \sqrt{2}z(1+i)+1$ lahko zapišemo kot

$$z \mapsto (\sqrt{2}+\sqrt{2}i)z + 1,$$

torej je sestavljena iz množenja s kompleksnim številom $\sqrt{2}+\sqrt{2}i$ in translacije za 1 desno. Ker je $|\sqrt{2}+\sqrt{2}i| = 2$ in $\arg(\sqrt{2}+\sqrt{2}i) = \frac{\pi}{4}$, je množenje z $\sqrt{2}+\sqrt{2}i$ sestavljeno iz rotacije za $\frac{\pi}{4}$ in središčnega raztega za faktor 2.



c. Iz zaporedja

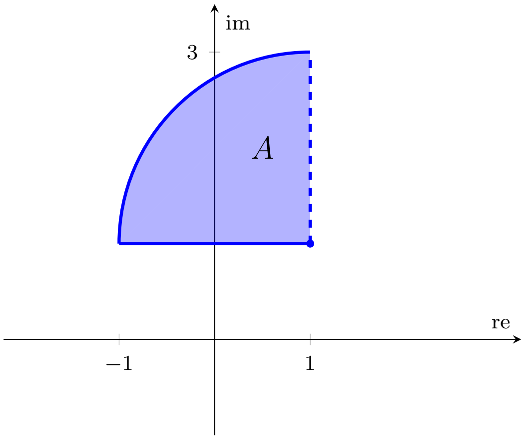
$$z \;\mapsto\; -z \;\mapsto\; \overline{-z} \;\mapsto\; \overline{-z} - 1 + i,$$

dobimo $f(z) = \overline{-z} - 1 + i$. Lahko upoštevamo še, da je $\overline{-z} = -\overline{z}$ in dobimo iskani predpis

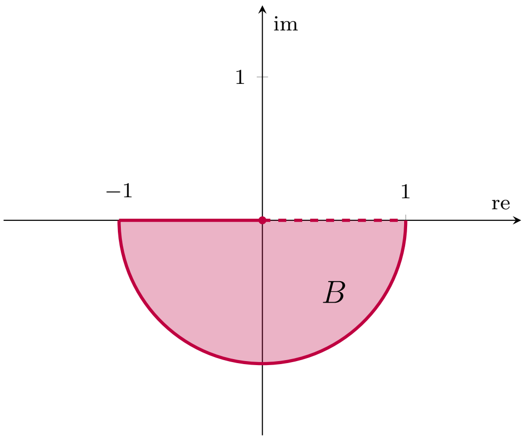
$$f(z) = -\overline{z} - 1 + i.$$

Rešitev naloge 27.

a. Če točke iz A premaknemo za 1 levo in 1 dol, bodo ležale v krogu z radijem 2 in središčem v izhodišču, polarni kot pa bo med $\frac{\pi}{2}$ in π. Narišemo to množico in jo transliramo za 1 desno in 1 gor, da dobimo množico A.



V množici B so števila, ki so največ za 1 oddaljena od izhodišča in imajo polarni kot med π in 2π.



b. Preslikava $g\colon A \to B$ bo sestavljena iz:
- premika v izhodišče, $z \mapsto z - 1 - i$,
- zrcaljenja preko x-osi, $z \mapsto \overline{z}$,
- rotacije za $-\frac{\pi}{2}$, $z \mapsto -iz$,
- podvajanja polarnega kota $z \mapsto z^2$,
- skrčitve $z \mapsto \frac{1}{4}z$.

Torej g slika

$$\begin{aligned} z \quad &\mapsto \quad z - 1 - i \quad \mapsto \quad \overline{z} - 1 + i \quad \mapsto \quad -i\overline{z} + 1 + i \\ &\mapsto \quad (-i\overline{z} + 1 + i)^2 \quad \mapsto \quad \frac{1}{4}(-i\overline{z} + 1 + i)^2, \end{aligned}$$

pri čemer smo upoštevali, da je $\overline{z - 1 - i} = \overline{z} - 1 + i$ in $-i(\overline{z} - 1 + i) = -i\overline{z} + 1 + i$. Iskana preslikava je torej

$$g(z) = \frac{1}{4}(-i\overline{z} + 1 + i)^2.$$

Rešitev naloge 28.

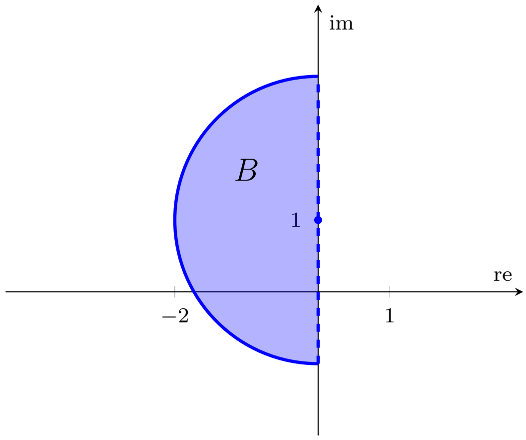
a. Če bi števila iz A premaknili za 2 levo in 2 gor, bi bil njihov polarni kot med 0 in π, absolutna vrednost pa med 0 in 2. Torej je

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \arg(z - (2 - 2i)) < \pi,\ |z - (2 - 2i)| \leq 2\}.$$

b. Transformacijo $f(z) = i(z - 1) - 2 = i(z - 1 + 2i)$ razčlenimo:

$$z \ \mapsto\ z - 1 + 2i \ \mapsto\ i(z - 1 + 2i).$$

Območje A moramo torej najprej premakniti za 1 levo in 2 gor, nato pa zavrteti okrog 0 za kot $\frac{\pi}{2}$.



Če točke iz B premaknemo za 1 dol, bodo imele absolutno vrednost 2 ali manj, polarni kot pa med $\frac{\pi}{2}$ in $\frac{3\pi}{2}$, torej je

$$B = \{z \in \mathbb{C} \mid \frac{\pi}{2} < \arg(z - i) < \frac{3\pi}{2},\ |z - i| \leq 2\}.$$

3. Zaporedja in vrste

Rešitev naloge 29.

Prvi izraz preoblikujemo in nato delimo števec in imenovalec s primerno potenco z največjo osnovo. Delili bomo s $5^{2n} = 25^n$. Lahko bi izbrali tudi s 5^{2n-1}, 5^{2n+1} ali kaj podobnega. Premisli, zakaj!

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} + 3 \cdot 5^{2n+1}}{2 \cdot 3^{2n-1} + (-1)^n\, 25^n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{25^n} + 3 \cdot \frac{5^{2n+1}}{5^{2n}}}{2 \cdot \frac{3^{2n-1}}{5^{2n}} + (-1)^n\, \frac{25^n}{25^n}} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot \left(\frac{2}{25}\right)^n + 3 \cdot 5}{2 \cdot \frac{1}{3} \cdot (\frac{3}{5})^{2n} + (-1)^n} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot \left(\frac{2}{25}\right)^n + 15}{\frac{2}{3} \cdot (\frac{3}{5})^{2n} + (-1)^n} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{15}{(-1)^n} = \\
&= \lim_{n\to\infty} (-1)^n \cdot 15.
\end{aligned}$$

Upoštevali smo, da je $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$, če je $|a| < 1$. Vidimo, da ima zaporedje dve stekališči, 15 in -15, torej ni konvergentno.

Za izračun druge limite pišimo $t = \frac{3n+2}{3}$. Potem gre pri $n \to \infty$ tudi $t \to \infty$. Izrazimo lahko še $n = t - \frac{2}{3}$ oziroma $2n - 1 = 2t - \frac{7}{3}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-1}{2+3n}\right)^{2n-1} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+2-3}{3n+2}\right)^{2n-1} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{3n+2}\right)^{2n-1} = \\
&= \lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{2t-\frac{7}{3}} = \lim_{t\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{t}\right)^{2t}}{\left(1-\frac{1}{t}\right)^{\frac{7}{3}}} = \\
&= \lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{2t} = \left(\lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{t}\right)^{2} = \\
&= \left(\frac{1}{e}\right)^2 = \frac{1}{e^2}.
\end{aligned}$$

Upoštevali smo, da je $\lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{\frac{7}{3}} = 1$.

Rešitev naloge 30.

Najprej izračunamo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}(2^{-n}-2) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n+2}} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Zdaj pa pogledamo, koliko členov je od limite $l = -\frac{1}{2}$ oddaljenih za več kot $\frac{1}{100}$.

$$\begin{aligned}
|a_n - l| &\geq \frac{1}{100}, \\
\left|\frac{1}{2^{n+2}} - \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right| &\geq \frac{1}{100}, \\
\left|\frac{1}{2^{n+2}}\right| &\geq \frac{1}{100}, \\
2^{n+2} &\leq 100, \\
2^n &\leq 25.
\end{aligned}$$

Vidimo, da temu pogoju ustrezajo $n = 0, 1, 2, 3, 4$. Od limite je za več kot $\frac{1}{100}$ torej oddaljenih 5 členov tega zaporedja.

Rešitev naloge 31.

a. Dobimo

$$a_1 = 7 - \frac{10}{a_0} = 7 - \frac{10}{4} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$$

in

$$a_2 = 7 - \frac{10}{a_1} = 7 - \frac{10}{\frac{9}{2}} = 7 - \frac{20}{9} = \frac{43}{9}\ .$$

b. Kandidati za limito morajo zadoščati enačbi, ki jo dobimo iz rekurzivne zveze pri $n \to \infty$. Označimo $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Potem mora veljati

$$a = 7 - \frac{10}{a}\ .$$

Enačbo pomnožimo z a in dobimo kvadratno enačbo

$$a^2 - 7a + 10 = 0,$$

ki jo lahko zapišemo tudi kot

$$(a-2)(a-5) = 0.$$

Kandidata za limito sta torej $a = 2$ in $a = 5$.

c. Pokažimo najprej, da je zaporedje navzgor omejeno s 5. Pri $n = 0$ res velja $a_0 = 4 \leq 5$ (baza indukcije). Pri indukcijskem koraku predpostavimo, da je $a_n \leq 5$ (indukcijska predpostavka) in želimo dokazati, da je tudi $a_{n+1} \leq 5$. Iz $a_n \leq 5$ sledi, da je $\frac{1}{a_n} \geq \frac{1}{5}$ in zato je $-\frac{10}{a_n} \leq -\frac{10}{5} = -2$. Če na obeh straneh neenakosti še prištejemo 7, dobimo $7 - \frac{10}{a_n} \leq 5$ oziroma $a_{n+1} \leq 5$, kar smo tudi želeli.

   Zdaj pa pokažimo še, da je zaporedje naraščajoče, tj. da je $a_n \geq a_{n-1}$ za vse n. Ker je $a_1 - a_0 = \frac{9}{2} - 4 = \frac{1}{2} \geq 0$, trditev velja za $n = 0$ (baza indukcije). Predpostavimo, da je $a_n \geq a_{n-1}$ (indukcijska predpostavka). Potem je $\frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{a_{n-1}}$ in je $-\frac{10}{a_n} \geq -\frac{10}{a_{n-1}}$. Sledi, da je $7 - \frac{10}{a_n} \geq 7 - \frac{10}{a_{n-1}}$ oziroma $a_{n+1} \geq a_n$, kar smo želeli pokazati.

   Ker je zaporedje naraščajoče in navzgor omejeno, je konvergentno (ima limito). Spomnimo se, da sta bila kandidata za limito števili 2 in 5. Ker je že $a_0 > 2$ in zaporedje narašča, je limita lahko samo 5.

Rešitev naloge 32.

a. Z indukcijo pokažimo, da je zaporedje naraščajoče. Najprej izračunamo $a_1 = \sqrt{6}$ in vidimo, da je res $a_1 \geq a_0$ (baza indukcije). Predpostavimo zdaj, da je $a_n \geq a_{n-1}$ (indukcijska predpostavka) in dokažimo, da je potem tudi $a_{n+1} \geq a_n$ (indukcijski korak). Iz
$$a_n \geq a_{n-1}$$
sklepamo, da je
$$6 + a_n \geq 6 + a_{n-1},$$
in ker sta obe števili nenegativni, lahko korenimo, pri čemer se neenačaj ohrani. Dobimo
$$\sqrt{6 + a_n} \geq \sqrt{6 + a_{n-1}},$$
torej je res $a_{n+1} \geq a_n$.

b. Kandidati za limito so rešitve enačbe $a = \sqrt{6 + a}$. Enačbo kvadriramo in dobimo $a^2 = 6 + a$ oziroma $a^2 - a - 6 = 0$. Izraz na levi lahko razcepimo in dobimo $(a - 3)(a + 2) = 0$. Kandidata za limito sta torej $a = -2$ in $a = 3$. Ker so vsi členi zaporedja pozitivni, je v resnici dober le $a = 3$.

c. Zaporedje bo konvergentno, če bo naraščajoče in navzgor omejeno. Prvo smo že pokazali. Dokažimo še, prav tako z indukcijo, da je zaporedje navzgor omejeno s 3. Očitno je $a_0 = 0 \leq 3$ (baza indukcije). Predpostavimo zdaj, da je $a_n \leq 3$ (indukcijska predpostavka) in dokažimo, da je $a_{n+1} \leq 3$ (indukcijski korak). Iz $a_n \leq 3$ sledi, da je $6 + a_n \leq 9$, zato je tudi $\sqrt{6 + a_n} \leq 3$ oziroma $a_{n+1} \leq 3$. Zaporedje torej konvergira in limita mora biti enaka edinemu možnemu kandidatu, tj. 3.

Rešitev naloge 33.

a. Dobimo
$$a_1 = \frac{3a_0 + 2}{5} = \frac{2}{5}$$
in
$$a_2 = \frac{3a_1 + 2}{5} = \frac{3 \cdot \frac{2}{5} + 2}{5} = \frac{16}{25}\ .$$

b. Kandidati za limito so rešitve enačbe $a = \frac{3a+2}{5}$. Preoblikujemo jo v $5a = 3a + 2$ in nato v $2a = 2$ oziroma $a = 1$. To je torej edini kandidat za limito.

c. Najprej z indukcijo pokažimo, da je zaporedje navzgor omejeno z 1. Očitno velja $a_0 = 0 \leq 1$ (baza indukcije). Predpostavimo zdaj, da je $a_n \leq 1$ (indukcijska predpostavka), in dokažimo, da je potem tudi $a_{n+1} \leq 1$ (indukcijski korak). Iz $a_n \leq 1$ sledi, da je $3a_n \leq 3$ in torej $3a_n + 2 \leq 5$. Neenakost še delimo s 5 in vidimo, da je $\frac{3a_n+2}{5} \leq 1$. Ampak izraz na levi strani je enak a_{n+1}, torej smo iz indukcijske predpostavke izpeljali, da je $a_{n+1} \leq 1$.

Pokazati moramo še, da je zaporedje naraščajoče. Očitno je $a_1 = \frac{2}{5} \geq 0 = a_0$ (baza indukcije). Predpostavimo še, da je $a_n \geq a_{n-1}$ (indukcijska predpostavka) in pokažimo, da tedaj velja tudi $a_{n+1} \geq a_n$ (indukcijski korak). Iz $a_n \geq a_{n-1}$ sledi, da je $3a_n \geq 3a_{n-1}$ in zato $3a_n + 2 \geq 3a_{n-1} + 2$. Neenakost spet delimo s 5 in dobimo $\frac{3a_n+2}{5} \geq \frac{3a_{n-1}+2}{5}$ oziroma $a_{n+1} \geq a_n$, kar smo želeli videti.

Ker je zaporedje naraščajoče in navzgor omejeno, je konvergentno. Ker je bil edini kandidat za limito 1, je $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

Rešitev naloge 34.

a. Očitno je $a_0 \leq 2$ (baza indukcije). Predpostavimo, da velja $a_n \leq 2$ (indukcijska predpostavka) in dokažimo, da potem velja tudi $a_{n+1} \leq 2$ (indukcijski korak). Vsi členi zaporedja so pozitivni (kvadrat realnega števila je vedno pozitiven in izraz ostane pozitiven tudi potem, ko prištejemo 6 in delimo s 5). To pomeni, da lahko neenakost $a_n \leq 2$ kvadriramo in dobimo $a_n^2 \leq 4$. Na obeh straneh prištejemo 6, delimo s 5 in dobimo $a_n^2 + 6 \leq 10$ ter končno $\frac{a_n^2+6}{5} \leq 2$. V izrazu na levi prepoznamo a_{n+1} in vidimo, da je $a_{n+1} \leq 2$. Zaporedje je torej navzgor omejeno z 2.

b. Najprej izračunajmo $a_1 = \frac{a_0^2+6}{5} = \frac{6}{5}$. Očitno je torej $a_1 = \frac{6}{5} \geq 0 = a_0$ (baza indukcije). Predpostavimo še, da je $a_n \geq a_{n-1}$ (indukcijska predpostavka) in pokažimo, da tedaj velja tudi $a_{n+1} \geq a_n$ (indukcijski korak). Iz $a_n \geq a_{n-1}$ sledi, da je $a_n^2 \geq a_{n-1}^2$ (premislili smo že, da so vsi členi zaporedja pozitivni). Na obeh straneh prištejemo 6, delimo s 5 in dobimo $a_n^2 + 6 \geq a_{n-1}^2 + 6$ ter $\frac{a_n^2+6}{5} \geq \frac{a_{n-1}^2+6}{5}$. Na levi strani prepoznamo a_{n+1} in na desni a_n. Dokazali smo torej, da je $a_{n+1} \geq a_n$ in je zaporedje res naraščajoče.

c. Ker je zaporedje naraščajoče in navzgor omejeno, ima limito. Kandidati za limito so rešitve enačbe
$$a = \frac{a^2+6}{5} \, .$$
Enačbo preoblikujemo v $5a = a^2 + 6$, nato v $a^2 - 5a + 6 = 0$ in nazadnje v
$$(a-2)(a-3) = 0.$$
Kandidata za limito sta torej 2 in 3. Ker so vsi členi zaporedja manjši od 2, je seveda $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$.

Rešitev naloge 35.

Če pišemo
$$\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{5^{n-1}} = 5 \cdot \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{5^n} = 5 \cdot \sum_{n=3}^{\infty} \left(-\frac{3}{5}\right)^n ,$$
vidimo, da gre za geometrijsko vrsto s kvocientom $q = -\frac{3}{5}$. Ker je $|q| < 1$, je vrsta konvergentna. Njena vsota je enaka
$$5 \cdot \frac{q^3}{1-q} = 5 \cdot \frac{\left(-\frac{3}{5}\right)^3}{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)} = -\frac{27}{40} \, .$$

Rešitev naloge 36.

a. Če vrsto zapišemo v obliki

$$5 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n,$$

vidimo, da gre za geometrijsko vrsto s kvocientom $q = \frac{4}{9}$. Ker je $|q| < 1$, je vrsta konvergentna in njena vsota je

$$5 \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{5}{1-\frac{4}{9}} = \frac{5}{\frac{5}{9}} = 9.$$

b. Če vrsto zapišemo v obliki

$$5 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{9}{4}\right)^n,$$

vidimo, da gre za geometrijsko vrsto s kvocientom $q = \frac{9}{4}$. Ker je $|q| \geq 1$, vrsta ni konvergentna.

Rešitev naloge 37.

a. Upoštevamo, da je limita geometrijskega zaporedja $a_n = q^n$ enaka 0 za $|q| < 1$, in vidimo, da je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{9 \cdot 3^n}{2^{2n}} = \lim_{n\to\infty} 9 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n = 9 \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0.$$

b. Vrsto zapišemo kot

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{9 \cdot 3^n}{2^{2n}} = 9 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Na desni prepoznamo geometrijsko vrsto s $q = \frac{3}{4}$ in $|q| < 1$, ki ima vsoto

$$\frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4.$$

Iskana vsota je torej enaka $9 \cdot 4 = 36$.

Rešitev naloge 38.

Vrsto razcepimo na dve geometrijski vrsti s koeficientoma $q_1 = \frac{1}{3}$ in $q_2 = \frac{2}{3}$. Ker je $|q_1| < 1$ in $|q_2| < 1$, obe vrsti konvergirata in vsota prvotne vrste je

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-2^k}{3^{k+1}} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^{k+1}} - \frac{2^k}{3^{k+1}}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3^k}\right) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2^k}{3^k}\right) = \\
&= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k - \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{1}{6} - \frac{2}{3} = \frac{1-4}{6} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Rešitev naloge 39.

a. Upoštevamo, da je

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

in da lahko vrstni red zveznih funkcij in limit menjamo, pa vidimo, da je

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{n}{2}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}} = \\ &= \sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}}} = \sqrt{\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}} = \sqrt{e}.\end{aligned}$$

Upoštevali smo še, da je $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right) = 1$. Poleg tega smo vpeljali novo spremenljivko $t = n+1$ in upoštevali, da $t\to\infty$ pri $n\to\infty$.

b. Ker je $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{e} \neq 0$, vrsta ne konvergira.

c. Vrsto zapišemo tako, da v njej prepoznamo geometrijsko vrsto s kvocientom $q = \frac{1}{3}$. Ker je $|q| < 1$, je vrsta konvergentna in njena vsota je

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{3^{n-2}} = 2\cdot\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{3^{n-2}} = 2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{n}} = 2\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 3.$$

Rešitev naloge 40.

Prva vrsta je geometrijska vrsta s kvocientom $q = -\frac{2}{5}$. Ker je $|q| < 1$, vrsta konvergira in njena vsota je

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(-\frac{2}{5}\right)^{n} = \frac{q^2}{1-q} = \frac{\left(-\frac{2}{5}\right)^2}{1-\left(-\frac{2}{5}\right)} = \frac{\frac{4}{25}}{\frac{7}{5}} = \frac{4}{35}\ .$$

Druga vrsta je prav tako geometrijska vrsta in tokrat je $q = \frac{x-2}{5}$. Konvergentna bo torej natanko takrat, ko bo $|q| < 1$. Neenačbo najprej poenostavimo:

$$\begin{aligned}\left|\frac{x-2}{5}\right| &< 1,\\ \frac{|x-2|}{|5|} &< 1,\\ |x-2| &< 5.\end{aligned}$$

Vidimo, da pogoju zadoščajo vsi x, ki so od 2 oddaljeni za manj kot 5, torej $x \in (-3, 7)$.

Rešitev naloge 41.

Če pišemo

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(a-1)^{2n}}{3^{n+1}} = \frac{4}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a-1)^{2n}}{3^{n}} = \frac{4}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(a-1)^2}{3}\right)^{n},$$

vidimo, da gre za geometrijsko vrsto s kvocientom $q = \frac{(a-1)^2}{3}$. Vrsta bo torej konvergentna natanko tedaj, ko bo $|q| < 1$. Ker je $(a-1)^2 \geq 0$ in $3 > 0$, absolutnih vrednosti ne potrebujemo in mora torej veljati

$$\frac{(a-1)^2}{3} < 1$$

oziroma

$$(a-1)^2 < 3.$$

Enačba $(a-1)^2 = 3$ oziroma $a^2 - 2a - 2 = 0$ ima rešitvi

$$a_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3},$$

pripadajoča neenačba pa je izpolnjena za vse $a \in (1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3})$. Dana vrsta bo torej konvergentna natanko za te vrednosti spremenljivke a. Vsota vrste je pri teh a enaka

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(a-1)^2}{3}\right)^n = \frac{q}{1-q} = \frac{\frac{(a-1)^2}{3}}{1-\frac{(a-1)^2}{3}} = \frac{(a-1)^2}{3-(a-1)^2} = \frac{(a-1)^2}{3-a^2+2a-1} = \frac{(a-1)^2}{2+2a-a^2},$$

zato je

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(a-1)^{2n}}{3^{n+1}} = \frac{4}{3}\cdot\frac{(a-1)^2}{2+2a-a^2}.$$

Rešitev naloge 42.

a. Dana vrsta je geometrijska vrsta s kvocientom $q = \frac{3x}{x+1}$. Konvergentna bo natanko tedaj, ko bo $|q| < 1$ oziroma

$$\left|\frac{3x}{x+1}\right| < 1.$$

Veljati mora torej $|3x| < |x+1|$. Ker je

$$|3x| = \begin{cases} 3x, & x \geq 0, \\ -3x, & x < 0, \end{cases} \quad \text{in} \quad |x+1| = \begin{cases} x+1, & x \geq -1, \\ -x-1, & x < -1, \end{cases}$$

ločimo tri primere: $x < -1$, $-1 \leq x < 0$ in $0 \leq x$.

- Če je $x < -1$, dobimo neenačbo $-3x < -x-1$ oziroma $x > \frac{1}{2}$. Ker sta pogoja $x < -1$ in $x > \frac{1}{2}$ nezdružljiva, je množica rešitev v tem primeru prazna.
- Če je $-1 \leq x < 0$, se neenačba glasi $-3x < x+1$, zadoščajo pa ji $x > -\frac{1}{4}$. Interval rešitev je v tem primeru $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$.
- Če je $0 \leq x$, dobimo $3x < x+1$ oziroma $x < \frac{1}{2}$. Interval rešitev je v tem primeru $[0, \frac{1}{2})$.

Vrsta torej konvergira za $x \in \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

b. Vsota vrste je enaka

$$2\cdot\frac{q^2}{1-q} = 2\cdot\frac{\left(\frac{3x}{x+1}\right)^2}{1-\frac{3x}{x+1}} = 2\frac{\frac{9x^2}{(x+1)^2}}{\frac{x+1-3x}{x+1}} = \frac{2\cdot 9x^2(x+1)}{(x+1)^2(1-2x)} = -\frac{18x^2}{(2x-1)(x+1)}\ .$$

4. Funkcije

Rešitev naloge 43.

a. Limito bomo izračunali na dva načina. Ker je

$$\lim_{x\to 1}(\sqrt{x}-1) = 0 \quad \text{in} \quad \lim_{x\to 1}(x-1) = 0,$$

lahko uporabimo l'Hospitalovo pravilo:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)'}{(x-1)'} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\ .$$

Lahko pa števec in imenovalec ulomka pomnožimo z $\sqrt{x}+1$ in dobimo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \\ &= \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \\ &= \lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

b. Tokrat je

$$\lim_{x\to\infty}(e^x+x^2)=\infty \quad \text{in} \quad \lim_{x\to\infty}(e^x+4x)=\infty,$$

zato lahko tudi v tem primeru uporabimo l'Hospitalovo pravilo. Ker pa je tudi

$$\lim_{x\to\infty}(e^x+x^2)'=\lim_{x\to\infty}(e^x+2x)=\infty \quad \text{in} \quad \lim_{x\to\infty}(e^x+4x)'=\lim_{x\to\infty}(e^x+4)=\infty$$

ter

$$\lim_{x\to\infty}(e^x+2x)'=\lim_{x\to\infty}(e^x+2)=\infty \quad \text{in} \quad \lim_{x\to\infty}(e^x+4)'=\lim_{x\to\infty}(e^x)=\infty,$$

uporabimo l'Hospitalovo pravilo trikrat zapored. Dobimo

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+x^2}{e^x+4x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+2x}{e^x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+2}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}1=1.$$

c. V tem in naslednjem primeru bomo prav tako uporabili l'Hospitalovo pravilo, poleg tega pa bomo upoštevali, da je

$$|x-2|=\begin{cases} x-2, & x\geq 2,\\ 2-x, & x\leq 2.\end{cases}$$

Dobimo

$$\lim_{x\searrow 2}\frac{x^2+4x-12}{|x-2|}=\lim_{x\searrow 2}\frac{x^2+4x-12}{x-2}=\lim_{x\searrow 2}\frac{(x^2+4x-12)'}{(x-2)'}=\lim_{x\searrow 2}\frac{2x+4}{1}=8.$$

d. V tem primeru se imenovalcu spremeni predznak, zato tokrat dobimo

$$\lim_{x\nearrow 2}\frac{x^2+4x-12}{|x-2|}=\lim_{x\nearrow 2}\frac{x^2+4x-12}{2-x}=\lim_{x\nearrow 2}\frac{(x^2+4x-12)'}{(2-x)'}=\lim_{x\nearrow 2}\frac{2x+4}{-1}=-8.$$

Rešitev naloge 44. ⇧

a. Ko gre $x\nearrow 0$, gre $\frac{1}{x}\to-\infty$, zato gre $e^{\frac{1}{x}}\to 0$. Torej je

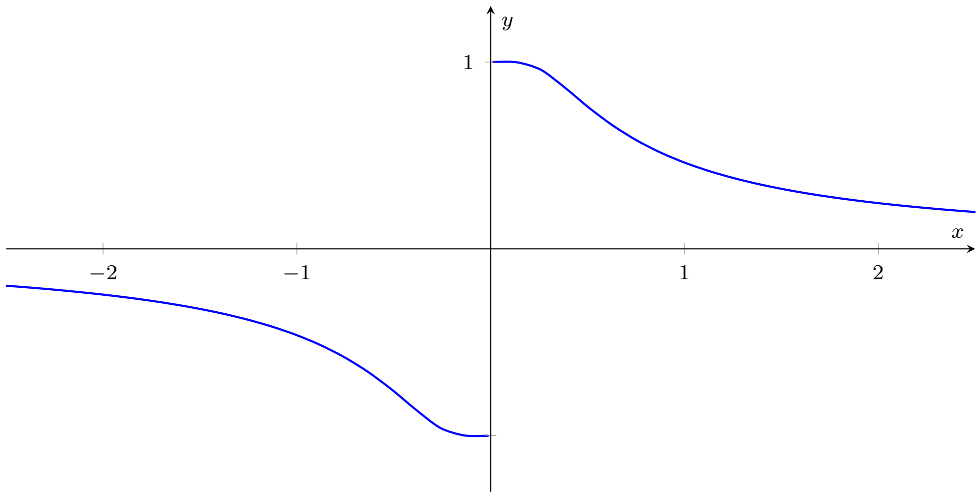
$$\lim_{x\nearrow 0}\frac{e^{1/x}-1}{e^{1/x}+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1.$$

Ko gre $x\searrow 0$, gre $\frac{1}{x}\to\infty$, zato gre $e^{\frac{1}{x}}\to\infty$. Ker gresta števec in imenovalec proti neskončno, lahko za izračun te limite uporabimo l'Hospitalovo pravilo. Dobimo

$$\lim_{x\searrow 0}\frac{e^{1/x}-1}{e^{1/x}+1}=\lim_{x\searrow 0}\frac{e^{1/x}(-\frac{1}{x^2})}{e^{1/x}(-\frac{1}{x^2})}=1.$$

b. Tak a ne obstaja, ker se leva in desna limita v točki 0 razlikujeta.

c.

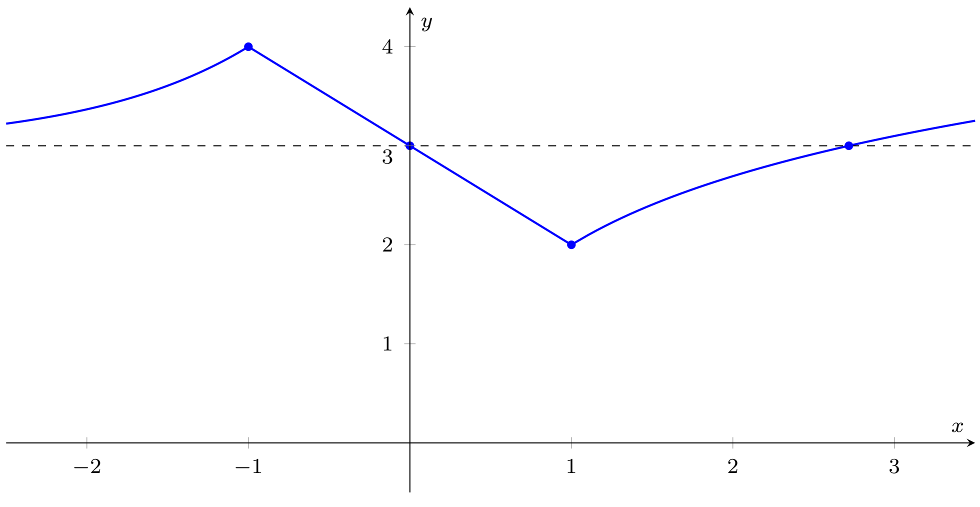


Rešitev naloge 45.

a. Funkcija bo zvezna, če bo veljalo
$$\lim_{x\nearrow 1} f(x) = f(1) \quad \text{in} \quad \lim_{x\searrow -1} f(x) = f(-1).$$
Brez težav izračunamo
$$\begin{aligned} \lim_{x\nearrow 1} f(x) &= \lim_{x\nearrow 1}(ax+b) = a+b, \\ f(1) &= \log 1 + 2 = 2, \\ \lim_{x\nearrow 1} f(x) &= \lim_{x\searrow -1}(ax+b) = -a+b, \\ f(-1) &= e^0 + 3 = 4. \end{aligned}$$
Veljati mora torej
$$\begin{aligned} a+b &= 2, \\ -a+b &= 4, \end{aligned}$$
zato je rešitev $a=-1$, $b=3$.

b. Izračunamo
$$\lim_{x\to-\infty}(e^{x+1}+3) = 3 + \lim_{x\to-\infty} e^{x+1} = 3+0 = 3.$$

c.



d. Funkcija f ni injektivna, ker iz $f(x_1) = f(x_2)$ ne sledi, da je $x_1 = x_2$. Na primer, $f(0) = 3$ in $f(e) = 3$, tj. funkcija pri dveh različnih x zavzame isto vrednost.

Rešitev naloge 46.

Funkcija f bo zvezna, če bo veljalo

$$\lim_{x \searrow -2} f(x) = f(-2) \quad \text{in} \quad \lim_{x \nearrow 1} f(x) = f(1).$$

Izračunamo

$$\begin{aligned}
\lim_{x \searrow -2} f(x) &= \lim_{x \searrow -2} (ax^2 + b) = 4a + b, \\
f(-2) &= -(-2) - 5 = -3, \\
\lim_{x \nearrow 1} f(x) &= \lim_{x \nearrow 1} (ax^2 + b) = a + b, \\
f(1) &= \log 1 = 0.
\end{aligned}$$

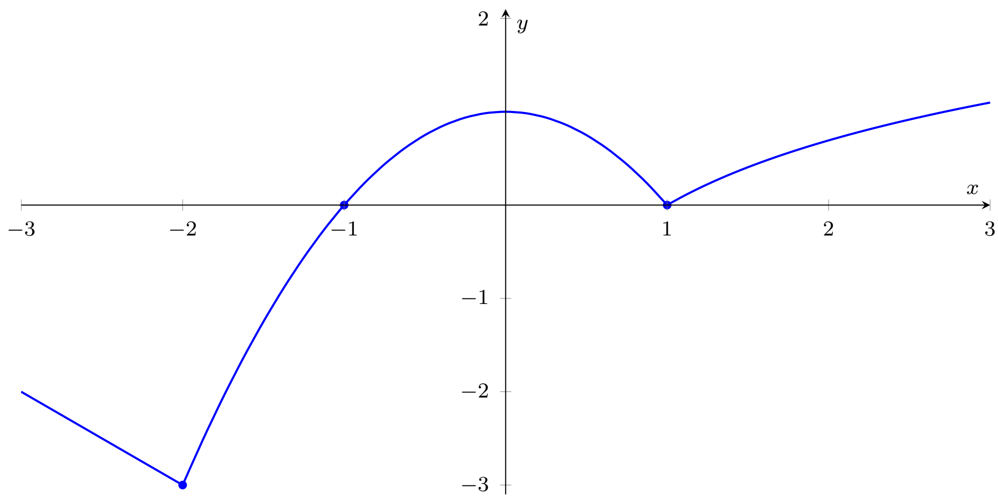
Rešitvi sistema

$$\begin{aligned}
4a + b &= -3, \\
a + b &= 0,
\end{aligned}$$

sta $a = -1$ in $b = 1$.

Ker je $f(-1) = f(1) = 0$, funkcija ni injektivna, saj pri dveh različnih x zavzame f isto vrednost.

Ker je $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \log x = \infty$, zaloga vrednosti ni omejena navzgor. Ker je $f(x) \geq -3$ za vse x, je zaloga vrednosti navzdol omejena z -3. Vrednost -3 funkcija zavzame pri $x = -2$, in ker je zvezna, zavzame tudi vse vrednosti med spodnjo in zgornjo mejo, zato je $\mathcal{Z}_f = [-3, \infty)$.



Rešitev naloge 47.

a. Funkcija f bo zvezna, če bo veljalo

$$\lim_{x \searrow -2} f(x) = f(-2) \quad \text{in} \quad \lim_{x \nearrow 1} f(x) = f(1).$$

Izračunamo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\searrow -2} f(x) &= \lim_{x\searrow -2}(x+1) = -1,\\
f(-2) &= ae^{-2} = \frac{a}{e^2},\\
\lim_{x\nearrow 1} f(x) &= \lim_{x\nearrow 1}(x+1) = 2,\\
f(1) &= b+1.
\end{aligned}$$

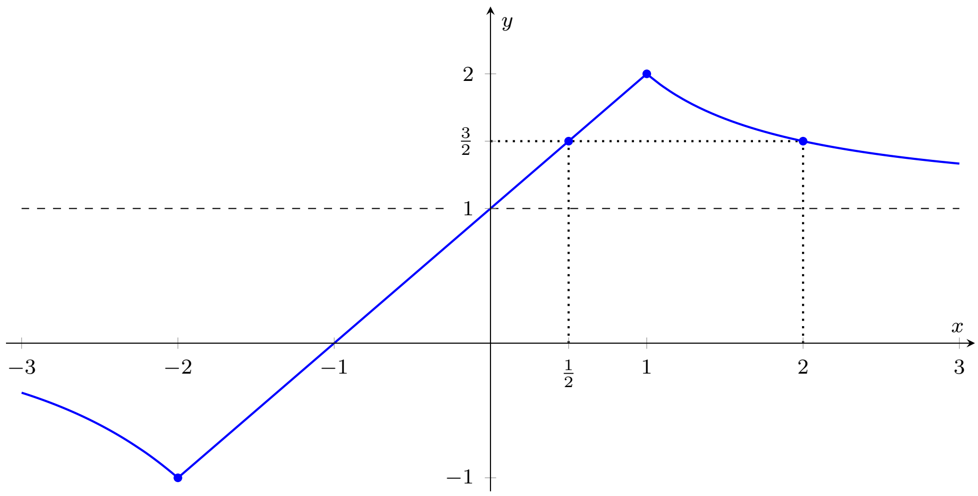
Rešitvi sistema

$$\begin{aligned}
\frac{a}{e^2} &= -1,\\
b+1 &= 2,
\end{aligned}$$

sta $a = -e^2$ in $b = 1$.

b. Funkcija je navzgor omejena z 2, navzdol pa z -1. Vrednost 2 zavzame pri $x = 1$, vrednost -1 pa pri $x = -2$. Ker je zvezna, zavzame tudi vse vrednosti vmes, zato je $\mathcal{Z}_f = [-1, 2]$.

c. Funkcija ni injektivna, ker nekatere vrednosti zavzame pri več različnih vrednostih spremenljivke x. Ker je $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$, zagotovo zavzame dvakrat vrednosti na intervalu $(1, 2)$. Na primer, $f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$ in $f(2) = \frac{3}{2}$.



Rešitev naloge 48.

Funkcijo bomo lahko zvezno razširili na vsa realna števila, če bo veljalo

$$\lim_{x\searrow 1} f(x) = \lim_{x\nearrow 1} f(x).$$

Najprej torej izračunamo

$$\lim_{x\searrow 1} f(x) = \lim_{x\searrow 1} a\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = a\cdot\lim_{x\searrow 1}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1} = a\cdot\lim_{x\searrow 1}\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{a}{2}$$

in

$$\lim_{x\nearrow 1} f(x) = \lim_{x\nearrow 1}\arctan\left(\frac{1}{1-x}\right) = \arctan\left(\lim_{x\nearrow 1}\frac{1}{1-x}\right) = \lim_{t\to\infty}\arctan t = \frac{\pi}{2}\ .$$

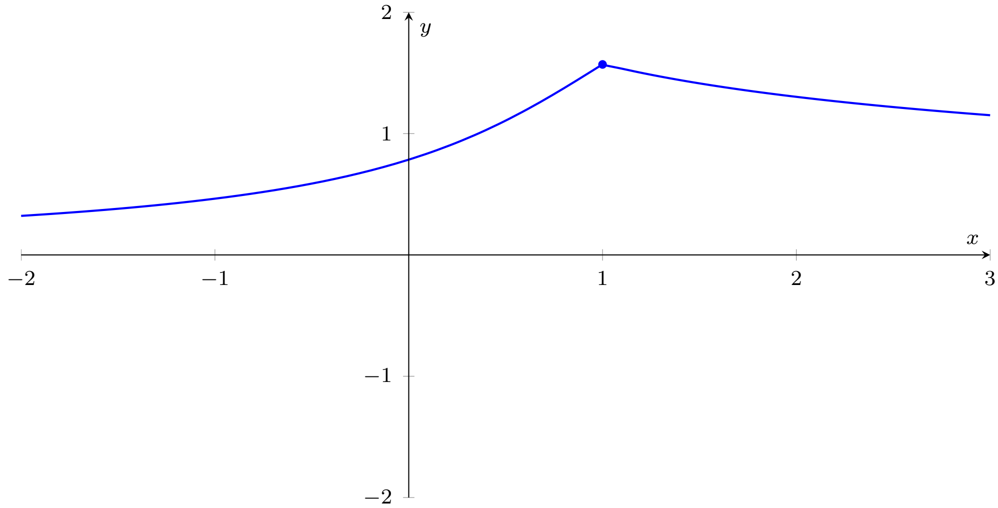
Pri izračunu prve limite smo uporabili l'Hospitalovo pravilo, pri izračunu druge pa smo upoštevali, da lahko menjamo vrsti red limite in zvezne funkcije ter da je

$$\lim_{x\nearrow 1}\frac{1}{1-x} = \infty.$$

Funkcija f bo zvezna, če bo veljalo

$$\frac{a}{2} = \frac{\pi}{2},$$

torej pri $a = \pi$.



Rešitev naloge 49.

a. Funkcija arctan je definirana na vsej realni osi, zato na $\mathcal{D}_f$ ne bo vplivala. Funkcija $\frac{1}{1-x}$ je definirana na $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Definicijsko območje funkcije f je torej $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

b. Ker je

$$\lim_{x \nearrow 1} \frac{1}{x-1} = -\infty \quad \text{in} \quad \lim_{x \searrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty,$$

je

$$\begin{aligned} \lim_{x \nearrow 1} f(x) &= \lim_{x \nearrow 1} \arctan\left(\frac{1}{x-1}\right) = \arctan\left(\lim_{x \nearrow 1} \frac{1}{x-1}\right) = \\ &= \lim_{t \to -\infty} \arctan t = -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} \lim_{x \searrow 1} f(x) &= \lim_{x \searrow 1} \arctan\left(\frac{1}{x-1}\right) = \arctan\left(\lim_{x \searrow 1} \frac{1}{x-1}\right) = \\ &= \lim_{t \to \infty} \arctan t = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

c. Najprej izračunamo

$$\lim_{x \nearrow 1} g(x) = \lim_{x \nearrow 1} (x+a) f(x) = (1+a) \lim_{x \nearrow 1} f(x) = -\frac{(1+a)\pi}{2}$$

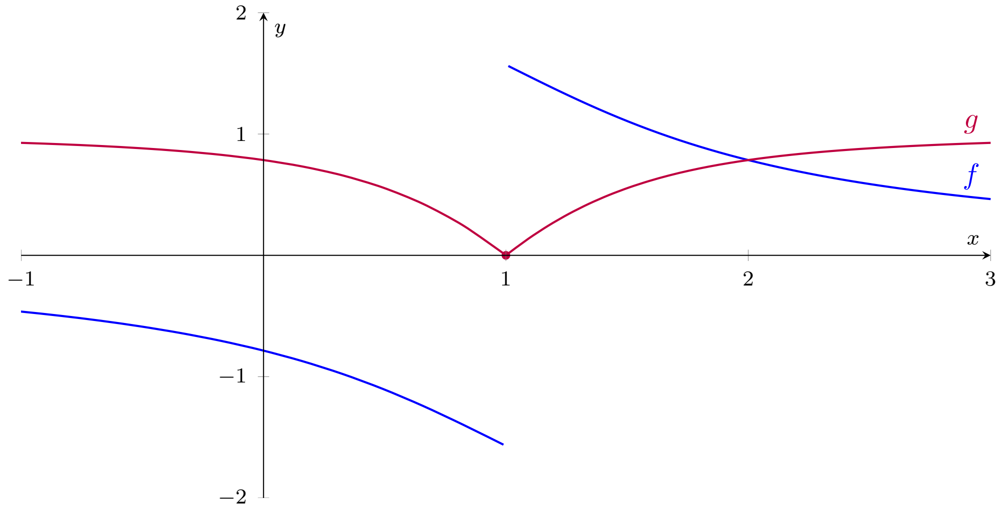
in

$$\lim_{x \searrow 1} g(x) = \lim_{x \searrow 1} (x+a) f(x) = (1+a) \lim_{x \searrow 1} f(x) = \frac{(1+a)\pi}{2}.$$

Ti limiti morata biti enaki, torej mora veljati

$$-(1+a) = 1+a$$

oziroma $(1+a) = 0$. Funkcija g bo torej zvezna, če bo $a = -1$.



Rešitev naloge 50.

a. Imenovalec ulomka ne sme biti enak 0, torej mora veljati $x^3 - 1 \neq 0$. Izraz $x^3 - 1$ lahko razcepimo na $(x-1)(x^2+x+1)$. Kvadratni člen v drugem oklepaju je nerazcepen in vedno pozitiven, torej je edini pogoj $x \neq 1$. Definicijsko območje je tako $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{1\}$.

b. Edina ničla funkcije je $x = 0$. Poli so v ničlah imenovalca. Kot smo premislili že pri iskanju $\mathcal{D}_f$, je v tem primeru to le pri $x = 1$.

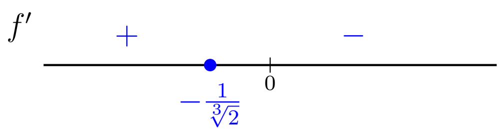
c. Najprej izračunamo

$$f'(x) = \frac{x'(x^3-1) - x(x^3-1)'}{(x^3-1)^2} = \frac{x^3 - 1 - x \cdot 3x^2}{(x^3-1)^2} = -\frac{1+2x^3}{(x^3-1)^2}\,.$$

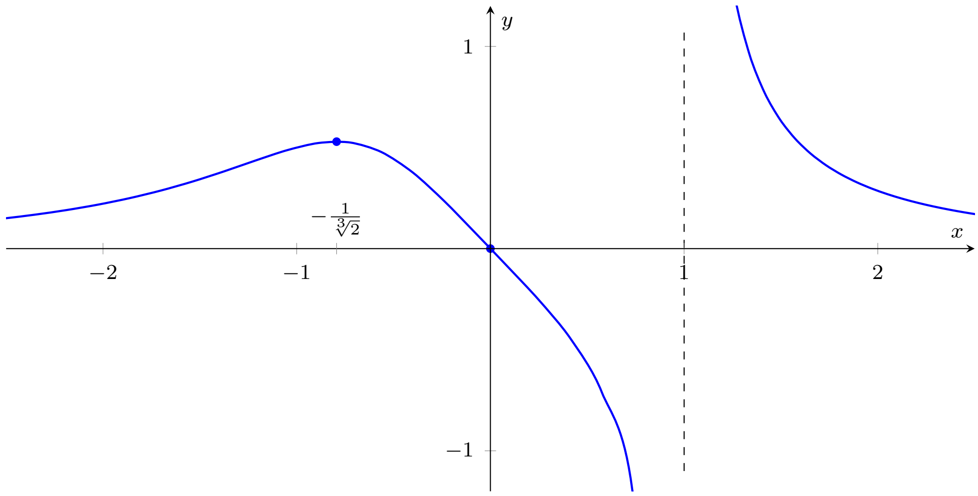
Kandidati za ekstreme so v ničlah odvoda. Seveda ima $f'(x)$ ničle natanko v ničlah števca, torej rešujemo enačbo

$$1 + 2x^3 = 0.$$

Izrazimo $x^3 = -\frac{1}{2}$ in dobimo edino realno rešitev $x_0 = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ (ostali dve rešitvi sta kompleksni). Ker ima $f'(x)$ v imenovalcu kvadrat, bo imenovalec vedno pozitiven in bo na predznak $f'(x)$ vplival le števec. Ker je x_0 ničla lihe stopnje, bo pri x_0 odvod spremenil predznak in bomo imeli ekstrem. Lahko se prepričamo, da je vrednost $f'(x)$ za $x < x_0$ pozitivna in za $x > x_0$ negativna. To pomeni, da f levo od x_0 narašča, desno od x_0 pa pada. Sledi, da je x_0 lokalni maksimum.



d.



Rešitev naloge 51.

a. Ker je $\log x$ definiran le za $x > 0$, je $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$. Ker je $x \neq 0$, je edina ničla tam, kjer je $\log x = 0$, to pa je pri $x = 1$. Izračunamo še

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^2 \log x = \infty$$

in

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2 \log x = \lim_{x\to 0} \frac{\log x}{x^{-2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{-1}}{-2x^{-3}} = -\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2} = 0.$$

Pri izračunu druge limite smo uporabili l'Hospitalovo pravilo.

b. Ko funkcijo f odvajamo, dobimo

$$f'(x) = (x^2)' \log x + x^2 (\log x)' = 2x \log x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \log x + x.$$

Izračunamo še

$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = \lim_{x\to\infty} (2x \log x + x) = \infty$$

in

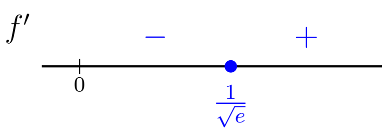
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} f'(x) &= \lim_{x\to 0}(2x \log x + x) = \lim_{x\to 0} 2x \log x + \lim_{x\to 0} x = \\ &= 2 \lim_{x\to 0} \frac{\log x}{x^{-1}} + 0 = 2 \lim_{x\to 0} \frac{x^{-1}}{-x^{-2}} = 2 \lim_{x\to 0}(-x) = 0.\end{aligned}$$

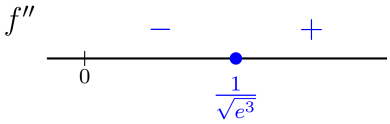
Pri izračunu druge limite smo uporabili l'Hospitalovo pravilo.

c. Ekstremi so rešitve enačbe $f'(x) = 0$. Če zapišemo

$$x(2 \log x + 1) = 0,$$

vidimo, da je edina ničla pri $\log x_1 = -\frac{1}{2}$, torej pri $x_1 = \frac{1}{\sqrt{e}}$. Druga potencialna rešitev, $x_2 = 0$, ne leži v $\mathcal{D}_f$. Določiti moramo še predznak odvoda v okolici x_1. Za $x < x_1$ je $f'(x)$ negativen, za $x > x_1$ pa je $f'(x)$ pozitiven. To pomeni, da funkcija levo od x_1 pada, desno od x_1 pa narašča. Pri x_1 ima funkcija f torej lokalni minimum. Seveda je x_1 edina točka, kjer lahko f' spremeni predznak na $\mathcal{D}_f$, torej je funkcija f padajoča za $x \in (0, x_1)$ in naraščajoča za $x \in (x_1, \infty)$.



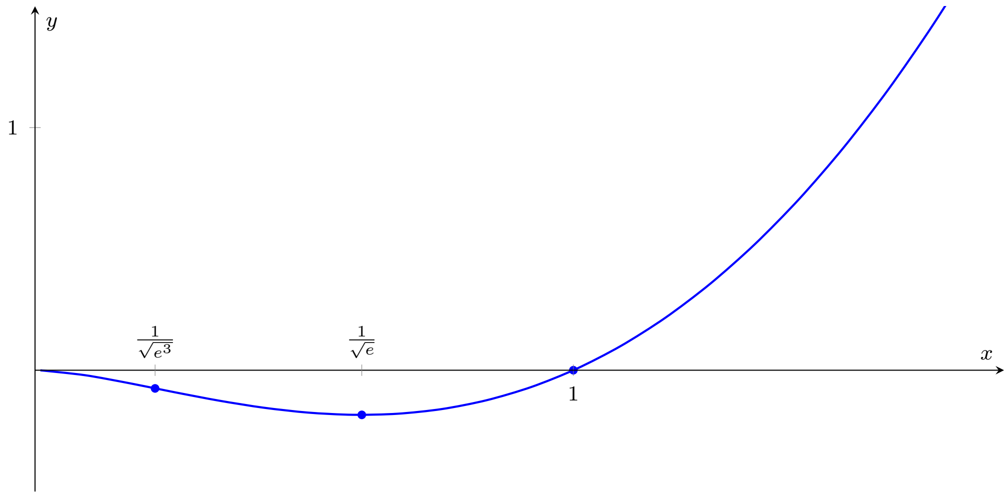


d. Za določanje konveksnosti in konkavnosti moramo pogledati drugi odvod. Najprej izračunamo

$$f''(x) = (2x)' \log x + 2x(\log x)' + x' = 2\log x + 2x\frac{1}{x} + 1 = 2\log x + 3.$$

Iz $f''(x) = 2\log x + 3 = 0$ dobimo $x_3 = e^{-\frac{3}{2}}$, ki je edini kandidat za prevoj. Preverimo, kakšen predznak ima f'' v okolici x_3. Vidimo, da je za $x < x_3$ drugi odvod f'' negativen, za $x > x_3$ pa je pozitiven. To pomeni, da je funkcija f na $(0, x_3)$ konkavna, na (x_3, ∞) pa konveksna. V točki x_3 je prevoj.

e. Pri skiciranju grafa poleg minimuma in prevoja upoštevamo še, da je $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ (približujemo se izhodišču) in $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$ (izhodišču se približujemo pod kotom $0°$ glede na x os).



Rešitev naloge 52.

Definicijsko območje: Funkcija ni definirana, ko je imenovalec ulomka enak 0, tj. pri $x = 0$. Definicijsko območje je torej

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty).$$

Obnašanje na robu definicijskega območja: Izračunamo limiti v neskončnosti ter levo in desno limito pri 0.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} xe^{\frac{1}{x}} = \infty,\\
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} xe^{\frac{1}{x}} = -\infty,\\
\lim_{x\searrow 0} f(x) &= \lim_{x\searrow 0} xe^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\searrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to\infty} \frac{e^t}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{e^t}{1} = \infty,\\
\lim_{x\nearrow 0} f(x) &= \lim_{x\nearrow 0} xe^{\frac{1}{x}} = 0.
\end{aligned}$$

Pri tretji limiti smo uporabili substitucijo $\frac{1}{x} = t$ in l'Hospitalovo pravilo.

Ničle: Ker je eksponentna funkcija vedno neničelna, je edini kandidat za ničlo točka $x = 0$, ampak ta ne leži v definicijskem območju. Funkcija f torej nima ničel.

Simetrija (lihost ali sodost): Ker

$$f(-x) = -xe^{-\frac{1}{x}}$$

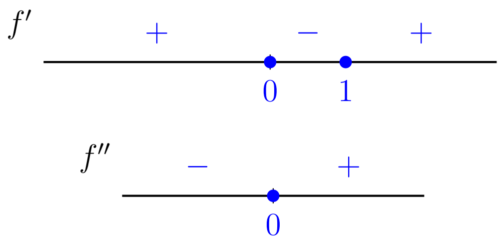
ni enako niti $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ niti $-f(x) = -xe^{\frac{1}{x}}$, funkcija ni niti soda niti liha.
Odvodi: Izračunamo prvi in drugi odvod in dobimo

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (x)'e^{\frac{1}{x}} + x\left(e^{\frac{1}{x}}\right)' = e^{\frac{1}{x}} + xe^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x}\right)' = e^{\frac{1}{x}} + xe^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \\
&= \left(1-\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}, \\
f''(x) &= \left(1-\frac{1}{x}\right)' e^{\frac{1}{x}} + \left(1-\frac{1}{x}\right)\left(e^{\frac{1}{x}}\right)' = \frac{1}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}} + \left(1-\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \\
&= \frac{1}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}} + \left(-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^3}\cdot e^{\frac{1}{x}}.
\end{aligned}$$

Ekstremi in monotonost: Kandidati za ekstreme funkcije so v ničlah odvoda in v točkah, kjer odvod ni definiran. To so hkrati tudi edine točke, v katerih lahko f' spremeni predznak. V tem primeru je f' definiran na $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Iz $f'(x)=0$ dobimo

$$\begin{aligned}
\left(1-\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}} &= 0, \\
1-\frac{1}{x} &= 0, \\
x &= 1.
\end{aligned}$$

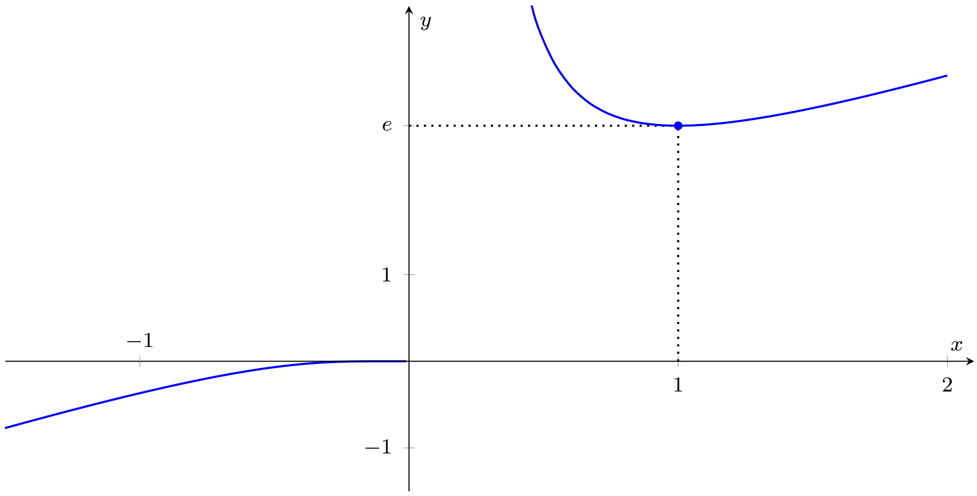
Ker je $e^{\frac{1}{x}} > 0$ povsod, je predznak $f'(x)$ enak predznaku izraza $1-\frac{1}{x}$. Torej je $f'(x) > 0$ za $x < 0$ in $x > 1$ ter $f'(x) < 0$ za $0 < x < 1$. Funkcija f na $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ narašča, na $(0, 1)$ pa pada. Pri $x = 1$ ima funkcija torej lokalni minimum, vrednost funkcije v minimumu pa je $f(1) = e$.



Konveksnost in konkavnost: Iščemo rešitve enačbe $f''(x) = 0$. Dobimo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^3}\cdot e^{\frac{1}{x}} &= 0, \\
\frac{1}{x^3} &= 0.
\end{aligned}$$

Ta enačba nima rešitev, zato f'' nima ničel. Predznak se lahko funkciji f'' spremeni kvečjemu v točki $x = 0$, kjer ni definirana. Vidimo, da je $f''(x) < 0$ za $x < 0$ in $f''(x) > 0$ za $x > 0$. Funkcija f je torej konkavna na $(-\infty, 0)$ in konveksna na $(0, \infty)$.



Rešitev naloge 53.

Definicijsko območje: Imenovalec ulomka mora biti različen od 0, torej $x \neq 0$. Poleg tega je logaritem definiran le za pozitivne vrednosti, torej mora biti $x^2 > 0$, kar pa je res za vse $x \neq 0$, zato ne dobimo dodatnih omejitev. Definicijsko območje je zato enako

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty).$$

Obnašanje na robu definicijskega območja: Izračunamo limiti v neskončnosti ter levo in desno limito pri $x = 0$. Dobimo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{\log(x^2)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x} = 0, \\
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\log(x^2)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x} = -0, \\
\lim_{x\searrow 0} f(x) &= \lim_{x\searrow 0} \frac{\log(x^2)}{x} = -\infty \\
\lim_{x\nearrow 0} f(x) &= \lim_{x\nearrow 0} \frac{\log(x^2)}{x} = \infty
\end{aligned}$$

Pri prvih dveh limitah, ki sta bili tipa $\frac{\infty}{\pm\infty}$, smo uporabili l'Hospitalovo pravilo, drugi dve pa sta bili oblike $\frac{-\infty}{\pm 0} = \mp\infty$. Pri tem -0 pomeni, da se funkcija ničli približuje z negativne strani.

Ničle: Iz $f(x) = 0$ dobimo

$$\begin{aligned}
\frac{\log(x^2)}{x} &= 0, \\
\log(x^2) &= 0, \\
x^2 &= 1, \\
x &= \pm 1.
\end{aligned}$$

Ničli sta torej $x_1 = 1$ in $x_2 = -1$.

Simetrija (lihost ali sodost): Izračunamo

$$f(-x) = \frac{\log((-x)^2)}{-x} = -\frac{\log(x^2)}{x} = -f(x)$$

in vidimo, da je funkcija liha. Njen graf bo torej simetričen glede na koordinatno izhodišče.

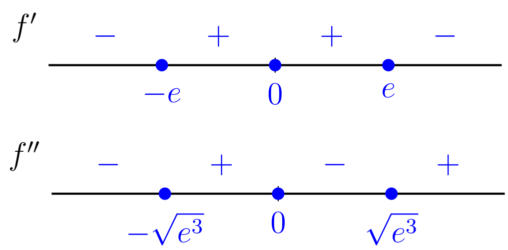
Odvodi:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(\log(x^2))' \cdot x - \log(x^2)\cdot x'}{x^2} = \frac{\frac{1}{x^2}\cdot 2x\cdot x - \log(x^2)\cdot 1}{x^2} = \frac{2-\log(x^2)}{x^2},\\
f''(x) &= \frac{(2-\log(x^2))'\cdot x^2 - (2-\log(x^2))\cdot (x^2)'}{x^4} =\\
&= \frac{-\frac{1}{x^2}\cdot 2x\cdot x^2 - (2-\log(x^2))\cdot 2x}{x^4} = \frac{-2x-4x+2x\log(x^2)}{x^4} =\\
&= \frac{2\log(x^2)-6}{x^3}.
\end{aligned}
$$

Ekstremi in monotonost: Kandidati za ekstreme funkcije so v ničlah odvoda in v točkah, kjer odvod ni definiran. V tem primeru odvod ni definiran za $x = 0$ iz pogoja $f'(x) = 0$ pa dobimo

$$
\begin{aligned}
\frac{2-\log(x^2)}{x^2} &= 0,\\
2-\log(x^2) &= 0,\\
\log(x^2) &= 2,\\
x^2 &= e^2,\\
x &= \pm e.
\end{aligned}
$$

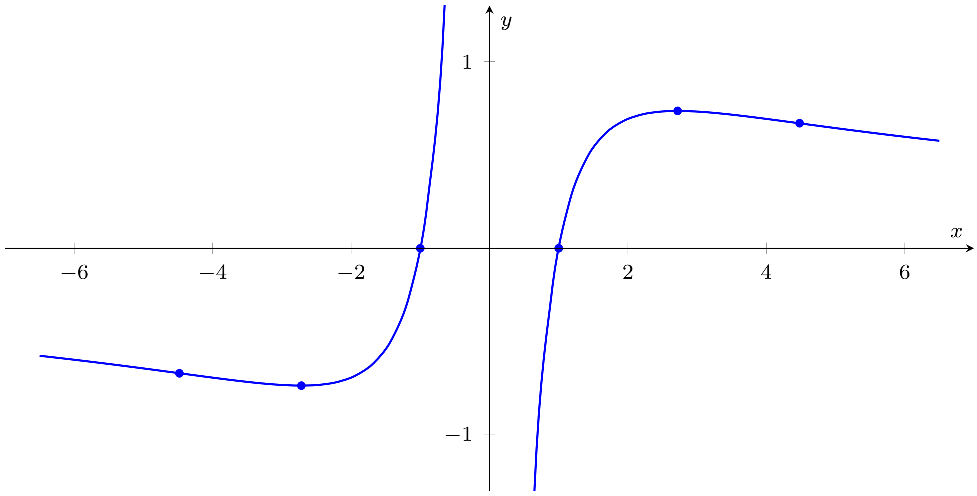
Predznak odvoda je enak predznaku števca $2 - \log(x^2)$. Če vrednost tega izraza izračunamo npr. za $x = \pm 1$ in $x = \pm e^2$, dobimo 2 (pozitivna vrednost) in -2 (negativna vrednost). To pomeni, da funkcija f na $(-\infty, -e) \cup (e, \infty)$ pada (odvod je negativen), na $(-e, 0) \cup (0, e)$ pa narašča (odvod je pozitiven). Točka $x = -e$ je torej lokalni minimum, točka $x = e$ pa lokalni maksimum. Pripadajoči vrednosti funkcije sta $f(-e) = -\frac{2}{e}$ in $f(e) = \frac{2}{e}$.



Konveksnost in konkavnost: Iščemo rešitve enačbe $f''(x) = 0$. Dobimo

$$
\begin{aligned}
\frac{2\log(x^2)-6}{x^3} &= 0,\\
2\log(x^2)-6 &= 0,\\
\log(x^2) &= 3,\\
x^2 &= e^3,\\
x &= \pm\sqrt{e^3}.
\end{aligned}
$$

Predznak f'' se torej lahko spremeni pri $x = \pm\sqrt{e^3}$ in pri $x = 0$, kjer f'' ni definiran. Najlažje predznak določimo tako, da izračunamo vrednost $f''(x)$ pri $x = \pm 1$ in $x = \pm e^4$. Vrednosti $f''(-1)$ in $f''(e^4)$ sta pozitivni, $f''(1)$ in $f''(-e^4)$ pa negativni. Funkcija f je torej konkavna na $(-\infty, -\sqrt{e^3}) \cup (0, \sqrt{e^3})$, konveksna pa na $(-\sqrt{e^3}, 0) \cup (\sqrt{e^3}, \infty)$.



Rešitev naloge 54.

Definicijsko območje: Funkcija arctan je definirana povsod. Izraz v imenovalcu ulomka ne sme biti enak 0, zato mora biti $x \neq \pm 1$. Definicijsko območje je torej $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Simetrija (lihost ali sodost): Ker je

$$f(-x) = \arctan\left(\frac{-x}{(-x)^2 - 1}\right) = -\arctan\left(\frac{x}{x^2 - 1}\right) = -f(x),$$

je funkcija liha in njen graf simetričen glede na izhodišče. Upoštevali smo, da je funkcija arctan liha in zato velja $\arctan(-x) = -\arctan x$ za vse x. Dejstvo, da je $f(-x) = -f(x)$, bomo izkoristili pri ostalih računih.

Obnašanje na robu definicijskega območja: Poleg limit pri $\pm\infty$ nas zanimajo še leve ter desne limite pri ± 1. Izračunamo

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to \infty} f(x) &= \lim_{x \to \infty} \arctan\left(\frac{x}{x^2 - 1}\right) = \arctan(0) = 0, \\
\lim_{x \searrow 1} f(x) &= \lim_{x \searrow 1} \arctan\left(\frac{x}{x^2 - 1}\right) = \arctan\left(\lim_{x \searrow 1}\left(\frac{x}{x^2 - 1}\right)\right) = \\
&= \lim_{t \to \infty} \arctan t = \frac{\pi}{2}, \\
\lim_{x \nearrow 1} f(x) &= \lim_{x \nearrow 1} \arctan\left(\frac{x}{x^2 - 1}\right) = \arctan\left(\lim_{x \nearrow 1}\left(\frac{x}{x^2 - 1}\right)\right) = \\
&= \lim_{t \to -\infty} \arctan t = -\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Ker je funkcija f liha, velja še

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -\infty} f(x) &= -\lim_{x \to \infty} f(x) = -0, \\
\lim_{x \searrow -1} f(x) &= -\lim_{x \nearrow 1} f(x) = \frac{\pi}{2}, \\
\lim_{x \nearrow -1} f(x) &= -\lim_{x \searrow 1} f(x) = -\frac{\pi}{2},
\end{aligned}$$

pri čemer -0 pomeni, da so vrednosti f negativne in naraščajo proti 0.

Ničle: Iz $f(x) = 0$ dobimo

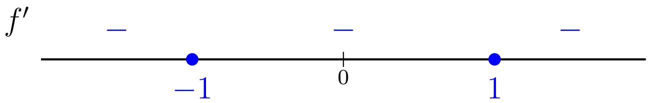
$$\begin{aligned}\arctan\left(\frac{x}{x^2-1}\right) &= 0,\\ \frac{x}{x^2-1} &= 0,\\ x &= 0.\end{aligned}$$

Upoštevali smo, da je $\arctan(x) = 0$ natanko tedaj, ko je $x = 0$, saj je funkcija arctan injektivna. Edina ničla je torej pri $x = 0$.

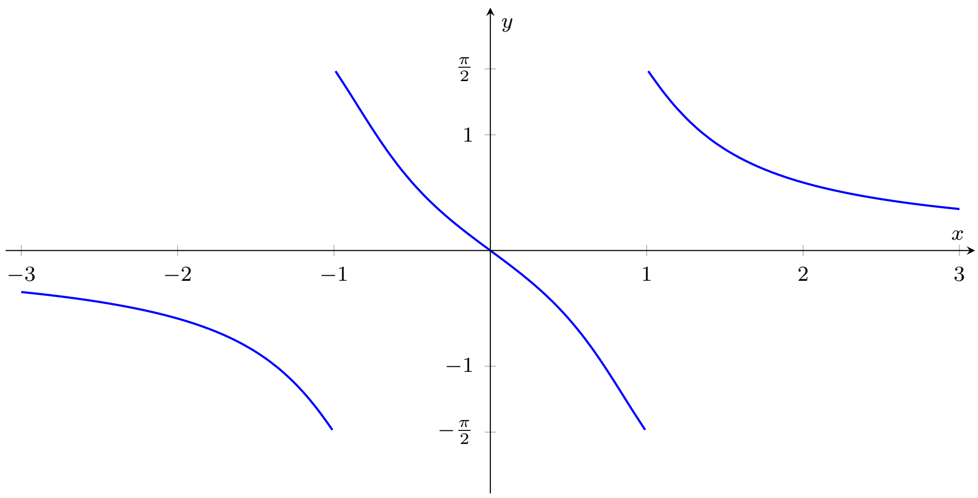
Odvodi: Izračunamo

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1}{1+\left(\frac{x}{x^2-1}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{x^2-1}\right)' = \frac{1}{1+\left(\frac{x^2}{(x^2-1)^2}\right)}\cdot\frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2} =\\ &= \frac{1}{\left(\frac{x^4-x^2+1}{(x^2-1)^2}\right)}\cdot\frac{-1-x^2}{(x^2-1)^2} = -\frac{(x^2-1)^2}{x^4-x^2+1}\cdot\frac{1+x^2}{(x^2-1)^2} =\\ &= -\frac{1+x^2}{x^4-x^2+1}.\end{aligned}$$

Ekstremi in monotonost: Izraz v imenovalcu $f'(x)$ je različen od 0 (pišemo $t = x^2$ in dobimo kvadratno enačbo z negativno diskriminanto in pozitivnim vodilnim členom, ki nima realnih ničel). To pomeni, da je f' definiran povsod, kjer je definirana funkcija f, torej na $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$. Števec $f'(x)$ je prav tako vedno različen od 0, zato odvod f' nima ničel. Še več, števec in imenovalec sta oba strogo pozitivna, tako da je zaradi negativnega predznaka pred ulomkom odvod ves čas negativen. Funkcija f je torej padajoča povsod, kjer je definirana.



Iz izračuna limit vidimo, da ima v -1 in 1 skok (z $-\frac{\pi}{2}$ na $\frac{\pi}{2}$).



Rešitev naloge 55.

Definicijsko območje: Funkcija je definirana povsod, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

Simetrija (lihost ali sodost): Ker je

$$f(-x) = -xe^{-\frac{(-x)^2}{2}} = -xe^{-\frac{x^2}{2}} = -f(x),$$

je funkcija liha.

Obnašanje na robu definicijskega območja: Najprej izračunamo

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{\frac{x^2}{2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{xe^{\frac{x^2}{2}}} = 0.$$

Uporabili smo l'Hospitalovo pravilo. Ker je funkcija f liha, velja

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\lim_{x\to\infty} f(x) = -0.$$

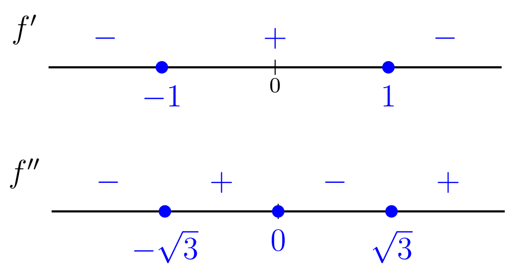
Pri tem -0 pomeni, da se graf funkcije f abscisi približuje od spodaj.

Ničle: Eksponentna funkcija nima ničel, zato je $f(x) = 0$ le pri $x = 0$.

Odvodi: Izračunamo

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (x)'e^{-\frac{x^2}{2}} + x(e^{-\frac{x^2}{2}})' = e^{-\frac{x^2}{2}} - x^2e^{-\frac{x^2}{2}} = e^{-\frac{x^2}{2}}(1-x^2),\\
f''(x) &= \left(e^{-\frac{x^2}{2}}(1-x^2)\right)' = \left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)'(1-x^2) + e^{-\frac{x^2}{2}}(1-x^2)' =\\
&= -xe^{-\frac{x^2}{2}}(1-x^2) - 2xe^{-\frac{x^2}{2}} = e^{-\frac{x^2}{2}}(-x+x^3) - 2xe^{-\frac{x^2}{2}} =\\
&= e^{-\frac{x^2}{2}}(x^3-3x).
\end{aligned}$$

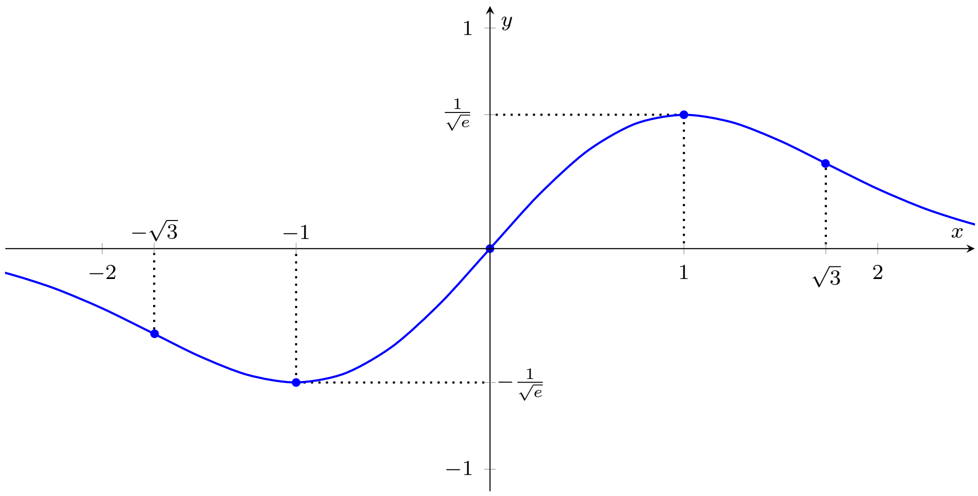
Ekstremi in monotonost: Kandidati za ekstreme funkcije so v ničlah odvoda in v točkah, kjer odvod ni definiran. V tem primeru je odvod definiran za vse realne x. Iz $f'(x) = 0$ dobimo $1 - x^2 = 0$ oziroma $x = \pm 1$. Ker je $e^{-\frac{x^2}{2}} > 0$ povsod, bo predznak odvoda enak predznaku $1 - x^2$, torej bo pozitiven natanko na $(-1, 1)$. Funkcija f torej na $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ pada, na $(-1, 1)$ pa narašča. Pri $x = -1$ je zato lokalni minimum, pri $x = 1$ pa lokalni maksimum. Vrednosti funkcije v lokalnih ekstremih sta $f(-1) = -\frac{1}{\sqrt{e}}$ in $f(1) = \frac{1}{\sqrt{e}}$.



Konveksnost in konkavnost: Rešitve enačbe $f''(x) = 0$ oziroma

$$x^3 - 3x = x(x^2-3) = 0$$

so $x = 0$, $x = -\sqrt{3}$ in $x = \sqrt{3}$. Predznak drugega odvoda je enak predznaku $x^3 - 3x$, ker je $e^{-\frac{x^2}{2}} > 0$ na vsej realni osi. To pomeni, da je f'' pozitiven natanko na $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, \infty)$. Funkcija f je torej konveksna na $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, \infty)$, konkavna pa na $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$. Pri $x = 0$, $x = -\sqrt{3}$ in $x = \sqrt{3}$ ima prevoje.



5. Odvod, tangente in ekstremalni problemi

Rešitev naloge 56.

a. Veljati mora $x-1 \neq 0$ (sicer bo v funkciji ulomek z imenovalcem 0) in $\frac{x}{x-1} > 0$, ker je funkcija log definirana le za pozitivne argumente. Drugi pogoj je enakovreden pogoju $x(x-1) > 0$ in iz lastnosti kvadratne funkcije vemo, da je to res za vse x, ki ležijo v uniji intervalov $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$. Pri tem je izpolnjen tudi že prvi pogoj, $x \neq 1$, zato je

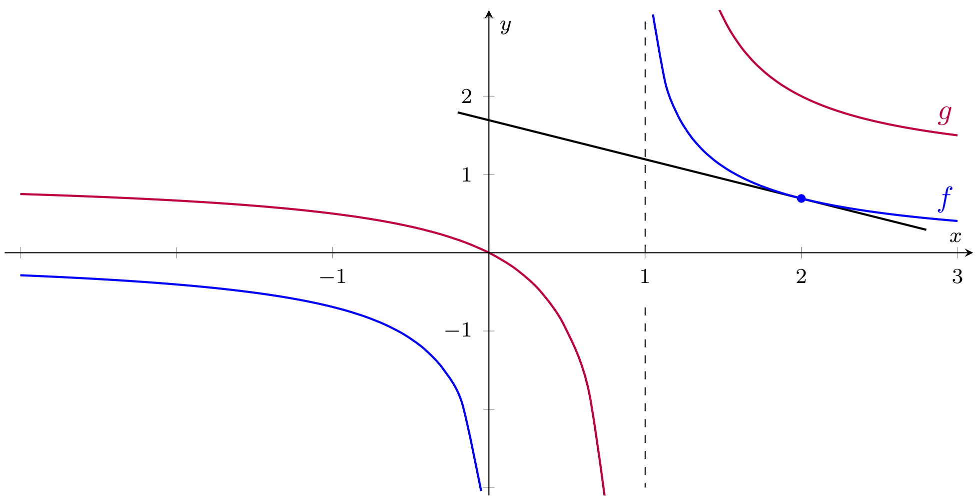
$$\mathcal{D}_f = (-\infty, 0) \cup (1, \infty).$$

Ničle funkcije so rešitve enačbe $f(x) = 0$. Dobimo

$$\begin{aligned} \log(\frac{x}{x-1}) &= 0, \\ \frac{x}{x-1} &= 1, \\ x &= x-1, \\ 0 &= -1. \end{aligned}$$

Ta funkcija torej nima ničel.

b.



c. Smerni koeficient tangente pri $x = 2$ bo enak $f'(2)$, zato f najprej odvajajmo. Dobimo

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\frac{x}{x-1}} \cdot \left(\frac{x}{x-1}\right)' = \frac{x-1}{x} \cdot \frac{(x-1)-x}{(x-1)^2} = \\ &= \frac{1}{x} \cdot \frac{-1}{x-1} = -\frac{1}{x(x-1)} \,. \end{aligned}$$

Pri $x = 2$ je $k = f'(2) = -\frac{1}{2}$. Za točko na tangenti vzamemo $(2, f(2))$, tj. točko $(2, \log 2)$. Iz enačbe za premico

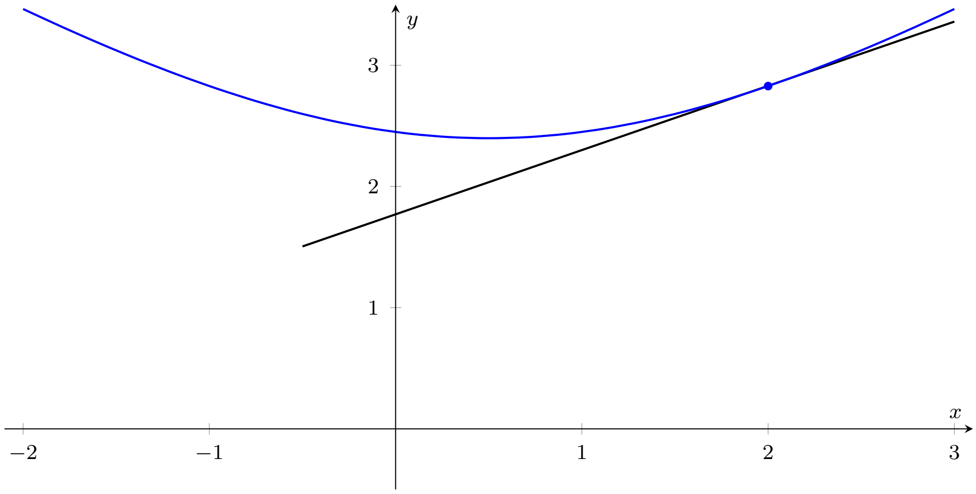
$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

dobimo $y - \log 2 = -\frac{1}{2}(x-2)$ oziroma

$$y = -\frac{1}{2}x + \log 2 + 1.$$

Rešitev naloge 57.

a. Veljati mora $6 - x + x^2 \geq 0$. Na levi imamo kvadratni polinom z diskriminanto $D = (-1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 1 = -23$. Ker je diskriminanta negativna, ta kvadratni polinom nima realnih ničel. Ker je vodilni koeficient pozitiven, je ta kvadratni polinom pozitiven na celi realni osi. Funkcija f je torej definirana povsod, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.



b. Najprej izračunamo odvod:

$$f'(x) = \frac{(6-x+x^2)'}{2\sqrt{6-x+x^2}} = \frac{(-1+2x)}{2\sqrt{6-x+x^2}} = \frac{2x-1}{2\sqrt{6-x+x^2}} \,.$$

Pri $x = 2$ dobimo

$$k = f'(2) = \frac{3}{2\sqrt{6-2+4}} = \frac{3}{4\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{8}.$$

Tangenta bo potekala skozi točko $(2, f(2))$, torej skozi $(2, 2\sqrt{2})$. Enačba tangente je torej

$$\begin{aligned} y - 2\sqrt{2} &= \frac{3\sqrt{2}}{8}(x-2), \\ y &= \frac{3\sqrt{2}}{8}x - \frac{3\sqrt{2}}{4} + 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

oziroma

$$y = \frac{3\sqrt{2}}{8}x + \frac{5\sqrt{2}}{4}.$$

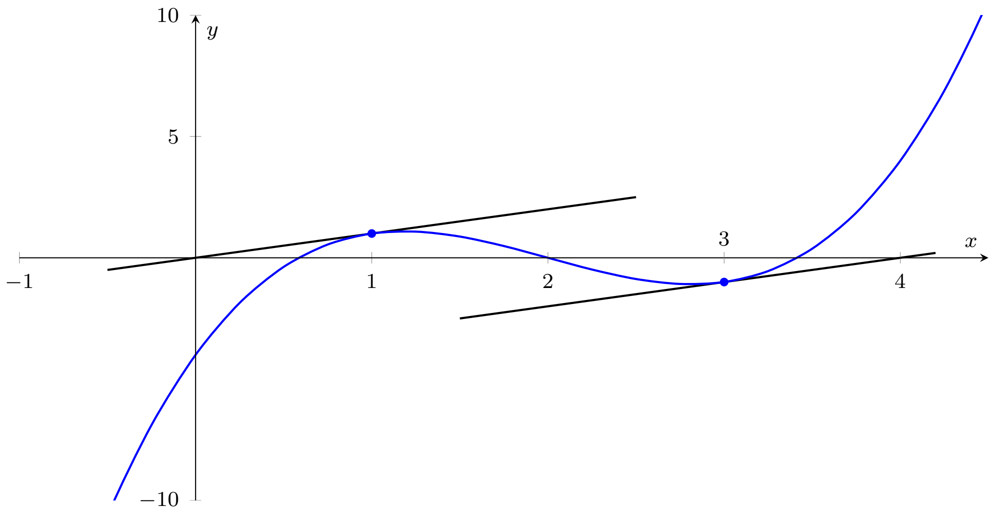
Rešitev naloge 58.

Najprej izračunajmo odvod $f'(x) = 3x^2 - 12x + 10$. Smerni koeficient tangente v točki $x = a$ je enak odvodu v tej točki, $f'(a)$. Premica oklepa z osjo x kot $\frac{\pi}{4}$ natanko takrat, ko je njen smerni koeficient enak 1. Od tod dobimo enačbo $3x^2 - 12x + 10 = 1$ oziroma po kratkem preurejanju

$$x^2 - 4x + 3 = 0.$$

Kvadratno funkcijo na levi strani razcepimo in dobimo $(x-3)(x-1) = 0$. Točki, v katerih tangenta oklepa željeni kot sta torej $x_1 = 1$ in $x_2 = 3$. Smerni koeficient tangent v teh točkah je seveda $k_1 = k_2 = 1$ in točki na grafu funkcije f imata koordinati $(1, f(1)) = (1, 1)$ ter $(3, f(3)) = (3, -1)$. Enačbi tangent sta tako $y - 1 = 1(x - 1)$ in $y + 1 = 1(x - 3)$ oziroma

$$y = x \quad \text{in} \quad y = x - 4.$$



Rešitev naloge 59.

Če v enačbo krivulje vstavimo $x = 1$, dobimo $1 + 2y - 3y^2 = 1$ oziroma $3y^2 - 2y = 0$. Rešitvi sta $y_1 = 0$ in $y_2 = \frac{2}{3}$. Iskani točki na krivulji sta torej $(1, 0)$ in $\left(1, \frac{2}{3}\right)$. Za izračun smernega koeficienta tangent bomo potrebovali odvod. Enačbo implicitno odvajamo po x. Pri tem upoštevamo, da je spremenljivka y odvisna od neodvisne spremenljivke x. Dobimo $2x + 2y + 2xy' - 6yy' = 0$. Enakost delimo z 2 in izrazimo y':

$$y' = \frac{y + x}{3y - x}.$$

V točki $(1, 0)$ je $y'(1, 0) = -1$, v točki $\left(1, \frac{2}{3}\right)$ pa je $y'\left(1, \frac{2}{3}\right) = \frac{5}{3}$. Enačbi tangent sta torej $y - 0 = -1(x - 1)$ in $y - \frac{2}{3} = \frac{5}{3}(x - 1)$ oziroma

$$y = -x + 1 \quad \text{in} \quad y = \frac{5}{3}x - 1.$$

Njuno presečišče izračunamo tako, da rešimo enačbo

$$-x + 1 = \frac{5}{3}x - 1.$$

Rešitev je $x_0 = \frac{3}{4}$. Če to vstavimo v enačbo za prvo tangentno, dobimo še y koordinato presečišča, $y_0 = \frac{1}{4}$. Tangenti se torej sekata v točki $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

Rešitev naloge 60.

a. Logaritem je definiran le za pozitivna realna števila, zato mora veljati $\frac{x^2}{2-x} > 0$. Izraz x^2 v števcu bo pozitiven za vsa realna števila z izjemo $x = 0$. Pri $x = 0$ ima ulomek vrednost 0 in funkcija f ni definirana. Imenovalec ulomka je pozitiven le pri $x < 2$. Definicijsko območje funkcije je torej enako $\mathcal{D}_f = (-\infty, 0) \cup (0, 2)$.

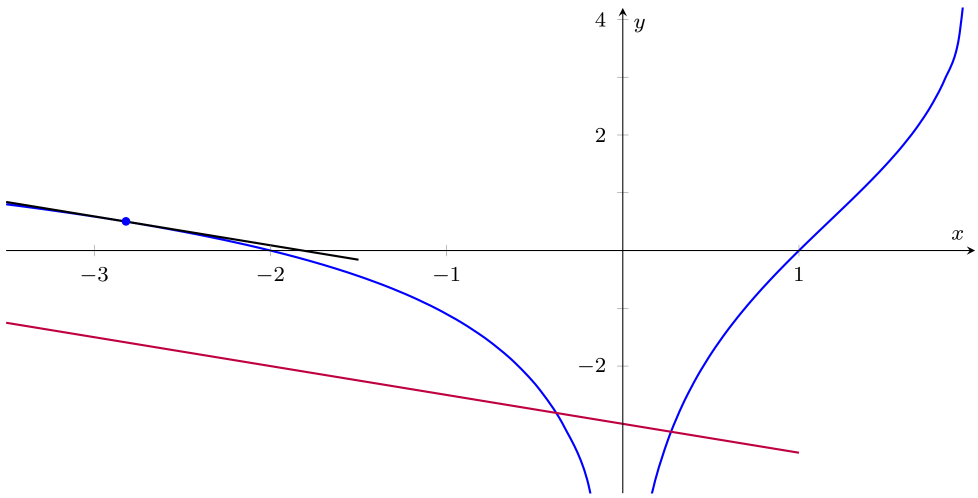
b. Izračunamo odvod

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\frac{x^2}{2-x}} \cdot \left(\frac{x^2}{2-x}\right)' = \frac{2-x}{x^2} \cdot \frac{(x^2)'(2-x) - x^2(2-x)'}{(2-x)^2} = \\ &= \frac{1}{x^2} \cdot \frac{2x(2-x)+x^2}{(2-x)} = \frac{4x-x^2}{x^2(2-x)} = \frac{4-x}{x(2-x)}. \end{aligned}$$

Dana premica ima smerni koeficient $-\frac{1}{2}$, zato rešimo enačbo $f'(x) = -\frac{1}{2}$. Dobimo

$$\begin{aligned} \frac{4-x}{x(2-x)} &= -\frac{1}{2}, \\ 2(4-x) &= -x(2-x), \\ 8-2x &= -2x+x^2, \\ x^2 &= 8, \\ x &= \pm 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Ker je $2\sqrt{2} > 2$ zunaj definicijskega območja funkcije f, je edina rešitev $x = -2\sqrt{2}$.



Rešitev naloge 61.

Vsota kvadratov razdalj od točke (x, y) do točk A in B je

$$d(x, y) = (x-1)^2 + (y+2)^2 + (x-3)^2 + (y-3)^2 = 2x^2 - 8x + 23 + 2y^2 - 2y.$$

Upoštevamo še vez $y = x^2$ in dobimo funkcijo ene spremenljivke

$$d(x) = 2x^2 - 8x + 23 + 2x^4 - 2x^2 = 2x^4 - 8x + 23.$$

Izračunamo odvod $d'(x) = 8x^3 - 8$. Iz pogoja $d'(x) = 0$ dobimo enačbo

$$8x^3 = 8,$$

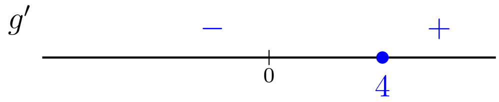
ki ima v realnih številih eno samo rešitev, $x = 1$. Iskana točka je torej $C(1, 1)$.

Rešitev naloge 62.

a. Iščemo ekstremne vrednosti izraza $f(x, y) = x^2 + 2y^2$. Izrazimo $y = 6 - x$ in dobimo funkcijo ene spremenljivke

$$g(x) = x^2 + 2(x-6)^2 = 3x^2 - 24x + 72 = 3(x^2 - 8x + 24).$$

Izračunamo odvod $g'(x) = 3(2x-8)$. Enačba $g'(x) = 0$ ima eno samo rešitev, $x = 4$. V tem primeru je $y = 2$ in $f(4,2) = 24$ je lokalni minimum, ker je g' za $x < 4$ negativen, za $x > 4$ pa pozitiven.



b. Drugih ničel odvod g' ni imel, zato bo maksimum dosežen na krajiščih intervala. Če je $x = 0$, je $y = 6$ in je $f(0,6) = 72$. Največji možni x je zaradi pogoja $y \in [0,7]$ enak $x = 6$. V tem primeru je $y = 0$ in je $f(6,0) = 36$. Vidimo, da je maksimum dosežen pri $x = 0$, $y = 6$.

Rešitev naloge 63.

Denimo, da se Janez nahaja v točki $(x, \sqrt{3x^2-2x+1})$ na krivulji. Njegova razdalja do točke T je tedaj enaka

$$d(x) = \sqrt{(x-3)^2 + (\sqrt{3x^2-2x+1})^2} = \sqrt{4x^2-8x+10}.$$

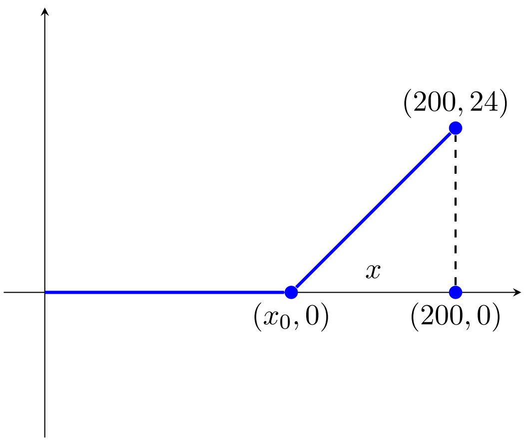
Ker je $d > 0$, bo razdalja najmanjša natanko tedaj, ko bo dosežen minimum funkcije $D = d^2$. Funkcijo

$$D(x) = 4x^2 - 8x + 10$$

odvajamo in dobimo $D'(x) = 8x - 8$. Enačba $D'(x) = 0$ ima eno samo rešitev, $x = 1$. Pri tem x je $y = \sqrt{3-2+1} = \sqrt{2}$. Najmočnejši signal bo torej v točki $(1, \sqrt{2})$.

Rešitev naloge 64.

Upoštevamo, da je čas potovanja enak $t = \frac{s}{v}$, kjer je s prepotovana razdalja, v pa (konstantna) hitrost. Očitno bo čas potovanja optimalen, če se bomo peljali po x osi do neke točke $(x_0, 0)$, nato pa nadaljevali po daljici od $(x_0, 0)$ do točke $(200, 24)$. Naj x označuje razdaljo med točko $(x_0, 0)$ in točko $(200, 0)$ kot na sliki:



Razdalja med točko $(x_0, 0)$ in točko $(200, 24)$ je po Pitagorovem izreku enaka $\sqrt{x^2+24^2}$. Čas potovanja bo torej enak

$$t(x) = \frac{200-x}{130} + \frac{\sqrt{x^2+24^2}}{50}.$$

Minimum funkcije t bo pri istem x kot minimum funkcije $D(x) = 650 \cdot t(x)$. Funkcijo

$$D(x) = 13\sqrt{x^2+576} + 5(200-x)$$

odvajamo in dobimo

$$D'(x) = 13\frac{x}{\sqrt{x^2+576}} - 5.$$

Enačbo $D'(x) = 0$ preoblikujemo:

$$\begin{aligned} 13\frac{x}{\sqrt{x^2+576}} &= 5, \\ 13x &= 5\sqrt{x^2+576}, \\ 169x^2 &= 25(x^2+576), \\ 144x^2 &= 14400, \\ x^2 &= 100. \end{aligned}$$

Edina pozitivna rešitev te enačbe je $x = 10$, torej moramo os x zapustiti pri $x_0 = 190$.

Rešitev naloge 65.

Zanima nas razmerje $v : r$ pri pogoju, da je površina

$$S = 2\pi r v + \pi r^2$$

konstantna. Iz zgornje zveze izrazimo

$$v = \frac{S - \pi r^2}{2\pi r}$$

in to vstavimo v formulo za volumen valja:

$$V = \pi r^2 v = \frac{\pi r^2 (S - \pi r^2)}{2\pi r} = \frac{1}{2} r(S - \pi r^2) = \frac{1}{2} rS - \frac{1}{2}\pi r^3.$$

Iščemo torej maksimum funkcije

$$V(r) = \frac{1}{2} rS - \frac{1}{2}\pi r^3.$$

Izračunamo odvod $V'(r)$ in zapišemo enačbo $V'(r) = 0$:

$$V'(r) = \frac{S}{2} - \frac{3}{2}\pi r^2 = 0.$$

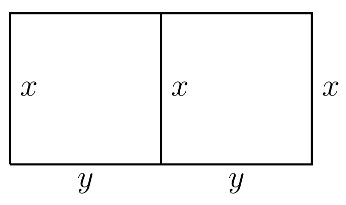
Od tu dobimo $S = 3\pi r^2$. Zdaj lahko izračunamo razmerje

$$v : r = \frac{S - \pi r^2}{2\pi r} : r = \frac{3\pi r^2 - \pi r^2}{2\pi r} : r = \frac{2\pi r^2}{2\pi r} : r = r : r = 1 : 1.$$

Pri konstantni površini S bo torej volumen V največji, ko bo $r = v$.

Rešitev naloge 66.

Označimo dolžine posameznih odsekov ograje kot na spodnji sliki.



Potem velja zveza $24 = 3x + 4y$, iz katere lahko izrazimo

$$y = \frac{24 - 3x}{4}.$$

Površina je enaka

$$S = 2xy = \frac{2x(24 - 3x)}{4} = \frac{1}{2} x(24 - 3x).$$

Iščemo torej maksimum funkcije

$$S(x) = \frac{1}{2}(24x - 3x^2).$$

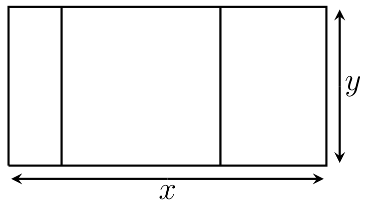
Izračunamo odvod

$$S'(x) = \frac{1}{2}(24 - 6x) = 12 - 3x.$$

Enačba $S'(x) = 0$ ima očitno rešitev $x = 4$ in iz zgoraj izpeljane zveze izračunamo še $y = 3$.

Rešitev naloge 67.

Označimo dolžini x in y kot na spodnji sliki.



Potem velja zveza $300 = 2x + 4y$, iščemo pa taki vrednosti x in y, da bo površina $S = xy$ maksimalna. Iz zveze izrazimo

$$y = \frac{300 - 2x}{4}$$

in dobimo

$$S(x) = \frac{x(300 - 2x)}{4} = \frac{1}{2}(150x - x^2).$$

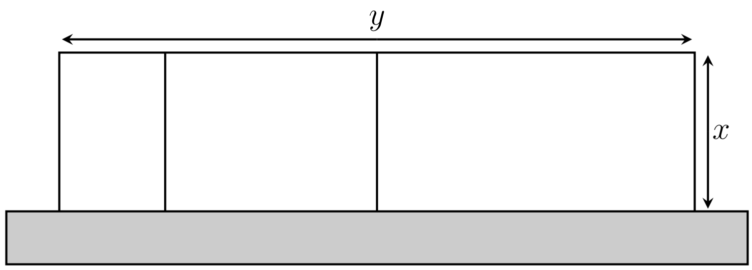
Izračunamo odvod

$$S'(x) = \frac{1}{2}(150 - 2x) = 75 - x.$$

Enačba $S'(x) = 0$ ima torej rešitev $x = 75$. Iz zgoraj izpeljane zveze dobimo še $y = 37,5$. Največja možna površina ograjenega območja je torej enaka $xy = 2812,5\ \mathrm{m}^2$.

Rešitev naloge 68.

Privzemimo oznake s spodnje slike.



Iščemo vrednosti x in y, pri katerih je površina $S = xy$ maksimalna, pri tem pa velja, da je obseg konstanten. Veljati mora torej $4x + y = c$ za neko neznano konstanto c. Od tu izrazimo $y = c - 4x$ in dobimo

$$S = xy = x(c - 4x) = xc - 4x^2.$$

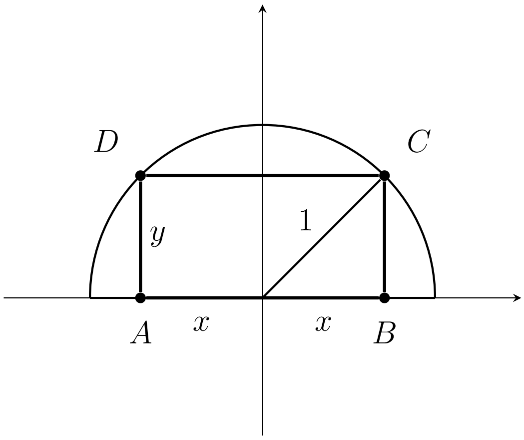
Iščemo torej maksimum funkcije $S(x) = xc - 4x^2$. Izračunamo $S'(x) = c - 8x$ in iz enačbe $S'(x) = 0$ razberemo, da je maksimum dosežen pri $x = \frac{c}{8}$. Iz zgoraj izpeljane zveze izračunamo še $y = c - \frac{4c}{8} = \frac{c}{2}$. Tako je

$$x : y = \frac{c}{8} : \frac{c}{2} = \frac{1}{8} : \frac{1}{2} = 1 : 4.$$

Maksimalno površino bomo torej dobili, če bo širina vrta x enaka četrtini njegove dolžine y.

Rešitev naloge 69.

Privzemimo oznake s spodnje slike, torej $|AB| = |CD| = 2x$ in $|AD| = |BC| = y$.



Ker je polmer polkroga enak 1, velja zveza $x^2 + y^2 = 1$, zato lahko izrazimo $y = \sqrt{1-x^2}$. Ploščina pravokotnika je enaka $S = 2xy$, torej iščemo maksimum funkcije

$$S(x) \;=\; 2x\sqrt{1-x^2}.$$

Izračunamo odvod

$$S'(x) \;=\; 2\sqrt{1-x^2} + 2x\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \;=\; 2\sqrt{1-x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Rešimo enačbo $S'(x) = 0$:

$$\begin{aligned}
2\sqrt{1-x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}} &= 0,\\
2(1-x^2) - 2x^2 &= 0,\\
1 - x^2 - x^2 &= 0,\\
2x^2 &= 1,\\
x &= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Seveda je smiselna le pozitivna rešitev, torej je $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Iz zgoraj izpeljane zveze med x in y izračunamo še $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Rešitev naloge 70.

Elipsa ima enačbo

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1,$$

od koder izpeljemo zvezo $9x^2 + 16y^2 = 144$ in izrazimo $y = \frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$. Ploščina pravokotnika bo enaka $S = 2x \cdot 2y = 4xy$, torej iščemo maksimum funkcije

$$S(x) \;=\; 4x \cdot \frac{3}{4}\sqrt{16-x^2} \;=\; 3x\sqrt{16-x^2}.$$

Funkcijo S odvajamo in rešimo enačbo $S'(x) = 0$:

$$
\begin{aligned}
3\sqrt{16-x^2} + 3x\frac{-2x}{2\sqrt{16-x^2}} &= 0, \\
3\sqrt{16-x^2} - \frac{3x^2}{\sqrt{16-x^2}} &= 0, \\
3(16-x^2) - 3x^2 &= 0, \\
16 - x^2 - x^2 &= 0, \\
16 - 2x^2 &= 0, \\
x^2 &= 8, \\
x &= \pm 2\sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

Smiselna je seveda rešitev, pri kateri je x pozitiven, torej je $x = 2\sqrt{2}$. Iz zgoraj dobljene zveze med x in y izrazimo še $y = \frac{3}{2}\sqrt{2}$.

6. Funkcije več spremenljivk

Rešitev naloge 71.

a. Izračunamo

$$
\begin{aligned}
f_x(x,y) &= 6x^2y^2 - 2xy - 4, \\
f_y(x,y) &= 4x^3y - x^2 + 3.
\end{aligned}
$$

b. Pišimo $f(x,2) = g(x)$. Potem je

$$
\begin{aligned}
g(x) &= 2x^3 \cdot 2^2 - x^2 \cdot 2 - 4x + 3 \cdot 2 - 1 = \\
&= 8x^3 - 2x^2 - 4x + 5.
\end{aligned}
$$

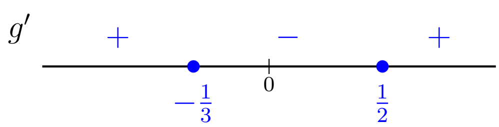
Izračunamo še odvod

$$g'(x) = 24x^2 - 4x - 4$$

in rešimo enačbo $g'(x) = 0$:

$$
\begin{aligned}
24x^2 - 4x - 4 &= 0, \\
6x^2 - x - 1 &= 0, \\
x_{1,2} &= \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 6}}{12}, \\
x_{1,2} &= \frac{1 \pm 5}{12}.
\end{aligned}
$$

Dobimo torej $x_1 = \frac{1}{2}$ in $x_2 = -\frac{1}{3}$. Ker je g' na $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ pozitiven na $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ pa negativen, je v $-\frac{1}{3}$ lokalni maksimum, v $\frac{1}{2}$ pa lokalni minimum.



Rešitev naloge 72.

Izračunamo

$$
\begin{aligned}
f_x(x,y) &= e^{x+y}(x-1)(y+1)+e^{x+y}(y+1)= \\
&= e^{x+y}(y+1)x \\
f_y(x,y) &= e^{x+y}(x-1)(y+1)+e^{x+y}(x-1)= \\
&= e^{x+y}(x-1)(y+2).
\end{aligned}
$$

Torej je

$$(\mathrm{grad} f)(x,y) = \left(e^{x+y}(y+1)x,\ e^{x+y}(x-1)(y+2)\right).$$

Stacionarne točke so rešitve sistema $\mathrm{grad} f(x,y)=0$. Dobimo

$$
\begin{gathered}
e^{x+y}(y+1)x = 0, \\
e^{x+y}(x-1)(y+2) = 0,
\end{gathered}
$$

in ker je $e^{x+y}>0$, mora biti

$$
\begin{gathered}
(y+1)x = 0, \\
(x-1)(y+2) = 0.
\end{gathered}
$$

Če je $x=0$, potem iz druge enačbe sledi $y=-2$, če pa je $y=-1$, potem iz druge enačbe sledi, da je $x=1$. Stacionarni točki sta torej $(0,-2)$ in $(1,-1)$.

Rešitev naloge 73.

a. Izračunamo parcialna odvoda funkcije po x in y:

$$
\begin{aligned}
f_x(x,y) &= 6x+8y-6, \\
f_y(x,y) &= -6y+8x-8.
\end{aligned}
$$

Gradient je torej enak

$$(\mathrm{grad} f)(x,y) = (6x+8y-6,\ 8x-6y-8).$$

b. Za stacionarne točke velja, da je $(\mathrm{grad} f)(x,y)=0$. Dobimo sistem enačb

$$
\begin{aligned}
6x+8y &= 6, \\
8x-6y &= 8,
\end{aligned}
$$

z rešitvijo $x=1$, $y=0$. Edina stacionarna točka je torej $(1,0)$.

Rešitev naloge 74.

Najprej izračunamo parcialna odvoda funkcije po x in y:

$$
\begin{aligned}
f_x(x,y) &= e^x(x+y^2+2y)+e^x = e^x(x+y^2+2y+1), \\
f_y(x,y) &= e^x(2y+2).
\end{aligned}
$$

Gradient je torej enak

$$(\mathrm{grad} f)(x,y) = \left(e^x(x+y^2+2y+1),\ e^x(2y+2)\right).$$

Smerni odvod v točki (x_0,y_0) v smeri vektorja $\vec{a}$ dobimo po formuli

$$f_{\vec{a}}(x_0,y_0) = \frac{(\mathrm{grad} f)(x_0,y_0)\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|}.$$

V našem primeru je

$$(\mathrm{grad} f)(0,1) = \left(e^0(0+1+2+1),\ e^0(2+2)\right) = (4,4)$$

in $\vec{a}=(1,-1)$, zato je

$$f_{(1,-1)}(0,1) = \frac{(4,4)\cdot(1,-1)}{|(1,-1)|} = \frac{4-4}{\sqrt{2}} = 0.$$

Ker je smerni odvod enak 0, sklepamo, da je to smer, tangentna na nivojnico, vzdolž katere se vrednost funkcije ne spreminja.

Rešitev naloge 75.

a. Najprej izračunamo parcialna odvoda

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= y+\frac{1}{4}\cdot 4x^3 = y+x^3, \\ f_y(x,y) &= x+\frac{1}{4}\cdot 4y^3 = x+y^3. \end{aligned}$$

Stacionarne točke so rešitev sistema

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= y+x^3 = 0, \\ f_y(x,y) &= x+y^3 = 0. \end{aligned}$$

Iz prve enačbe izrazimo $y=-x^3$ in to vstavimo v drugo, pa dobimo

$$x-x^9=0$$

oziroma

$$x(1-x^8)=0.$$

Realne rešitve te enačbe so $x=0$, $x=1$ in $x=-1$. Izračunamo še pripadajoče y in dobimo stacionarne točke $(0,0)$, $(1,-1)$ in $(-1,1)$. Zdaj pa izračunamo še druge odvode

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= 3x^2, \\ f_{xy}(x,y) &= 1, \\ f_{yy}(x,y) &= 3y^2, \end{aligned}$$

in dobimo Hessejevo matriko

$$H(x,y)=\begin{bmatrix} 3x^2 & 1 \\ 1 & 3y^2 \end{bmatrix}$$

z determinanto

$$\det H(x,y)=9x^2y^2-1.$$

Očitno je levi zgornji element v Hessejevi matriki pozitiven v točkah $(1,-1)$ ter $(-1,1)$ in enak 0 v točki $(0,0)$. Izračunamo $\det H(1,-1)=8>0$, $\det H(-1,1)=8>0$ in $\det H(0,0)=-1<0$. Točki $(1,-1)$ in $(-1,1)$ sta torej minimuma, točka $(0,0)$ pa sedlo.

b. Gradient funkcije f je enak

$$(\mathrm{grad} f)(x,y)=(y+x^3,\ x+y^3),$$

zato je smerni odvod v točki $(1,1)$ v smeri vektorja $\vec{a}=(-1,1)$ enak

$$f_{\vec{a}}(1,1)=\frac{(\mathrm{grad} f)(1,1)\cdot\vec{a}}{|a|}=\frac{(2,2)\cdot(-1,1)}{\sqrt{(-1)^2+1^2}}=\frac{-2+2}{\sqrt{2}}=0.$$

Vrednosti funkcije f se v smeri vektorja $\vec{a}$ torej ne spreminjajo, tj. vektor $\vec{a}$ je tangenten na nivojnico v točki $(1,1)$.

c. Funkcijske vrednosti najhitreje naraščajo v smeri gradienta. V točki $(1,1)$ torej najhitreje naraščajo v smeri vektorja $(2,2)$.

Rešitev naloge 76.

a. Funkcija ne bo definirana, če bo imenovalec katerega od ulomkov enak nič. Definicijsko območje je torej

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \text{ ali } y = 0\},$$

tj. ravnina brez koordinatnih osi.

b. Izračunamo parcialna odvoda

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= -\frac{2}{x^2} + y, \\ f_y(x,y) &= x - \frac{2}{y^2}. \end{aligned}$$

Gradient funkcije f je torej enak

$$(\mathrm{grad} f)(x,y) = \left(-\frac{2}{x^2} + y,\ x - \frac{2}{y^2}\right).$$

c. Funkcija najhitreje narašča v smeri gradienta. V točki $(1,1)$ velja

$$(\mathrm{grad} f)(1,1) = (-1,\ -1) = \vec{g},$$

zato dobimo

$$f_{\vec{g}}(1,1) = \frac{(-1,-1)\cdot(-1,-1)}{\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{1+1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

V splošnem je smerni odvod v točki (x_0,y_0) v smeri gradienta $\vec{g} = (\mathrm{grad} f)(x_0,y_0)$ enak

$$f_{\vec{g}}(x_0,y_0) = \frac{\vec{g}\cdot\vec{g}}{|\vec{g}|} = \frac{|\vec{g}|^2}{|\vec{g}|} = |\vec{g}|,$$

torej kar velikosti gradienta. Če se tega dejstva spomnimo, lahko dobimo zgornji rezultat z nekaj manj računanja:

$$f_{\vec{g}}(1,1) = |(-1,-1)| = \sqrt{2}.$$

Rešitev naloge 77.

a. Izračunamo parcialna odvoda

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 3x^2 - 6xy - 9y^2, \\ f_y(x,y) &= -3x^2 - 18xy + 6y. \end{aligned}$$

Stacionarne točke so torej rešitev sistema

$$\begin{aligned} x^2 - 2xy - 3y^2 &= 0, \\ x^2 + 6xy - 2y &= 0. \end{aligned}$$

Ker je

$$x^2 - 2xy - 3y^2 = (x+y)(x-3y),$$

je $x = -y$ ali pa $x = 3y$. Eno in drugo vstavimo v drugo enačbo. Pri $x = -y$ dobimo

$$y^2 - 6y^2 - 2y = -5y^2 - 2y = -y(5y+2) = 0$$

oziroma $y = 0$ in $x = 0$ ali pa $y = -\frac{2}{5}$ in $x = \frac{2}{5}$. Pri $x = 3y$ dobimo

$$9y^2 + 18y^2 - 2y = 27y^2 - 2y = y(27y - 2) = 0$$

oziroma še eno novo rešitev, $y = \frac{2}{27}$, $x = \frac{6}{27}$. Stacionarne točke so torej $(0,0)$, $\left(\frac{2}{5}, -\frac{2}{5}\right)$ in $\left(\frac{6}{27}, \frac{2}{27}\right)$.

b. Gradient funkcije f je enak

$$(\mathrm{grad} f)(x, y) = (3x^2 - 6xy - 9y^2,\ -3x^2 - 18xy + 6y),$$

torej je

$$(\mathrm{grad} f)(1, 1) = (3 - 6 - 9,\ -3 - 18 + 6) = (-12, -15).$$

V smer proti izhodišču kaže vektor $\vec{a} = (-1, -1)$. Dobimo

$$f_{\vec{a}}(1, 1) = \frac{(-12, -15) \cdot (-1, -1)}{\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{12 + 15}{\sqrt{2}} = \frac{27}{\sqrt{2}}.$$

Rešitev naloge 78.

a. Nalogo najlažje rešimo tako, da vez $y = \frac{1}{x}$ vstavimo v predpis za funkcijo $f(x, y)$. Dobimo funkcijo ene spremenljivke

$$\varphi(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \log \frac{1}{x} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{2} \log x.$$

Izračunamo odvod $\varphi'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x}$ in rešimo enačbo $\varphi'(x) = 0$. Rešitev je $x = 2$ in iz vezi izračunamo še $y = \frac{1}{2}$.

b. Smerni odvod v točki (x_0, y_0) smeri gradienta je enak $|(\mathrm{grad} f)(x_0, y_0)|$. Izračunamo

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \frac{1}{x^2}, \\ f_y(x, y) &= \frac{1}{2y}. \end{aligned}$$

Gradient funkcije f je torej enak

$$(\mathrm{grad} f)(x, y) = \left(\frac{1}{x^2}, \frac{1}{2y} \right).$$

V točki $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ je

$$(\mathrm{grad} f) \left(2, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{4}, 1 \right),$$

zato je iskani smerni odvod enak

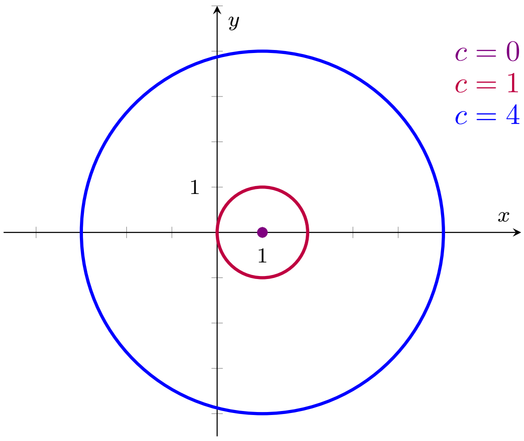
$$\left| (\mathrm{grad} f) \left(2, \frac{1}{2}\right) \right| = \left| \left(\frac{1}{4}, 1 \right) \right| = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{17}{16}} = \frac{\sqrt{17}}{4}.$$

Rešitev naloge 79.

a. Enakost $f(x, y) = c$ preoblikujemo:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 2x + y^2 + 1} &= c, \\ x^2 - 2x + y^2 + 1 &= c^2, \\ x^2 - 2x + 1 + y^2 &= c^2, \\ (x - 1)^2 + y^2 &= c^2. \end{aligned}$$

Nivojnice so torej krožnice s središčem v točki $(1, 0)$ in z radijem c. Pri $c = 0$ se nivojnica izrodi v točko $(1, 0)$.



b. Izračunamo parcialna odvoda po x in po y:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+y^2+1}} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+y^2+1}}, \\ f_y(x,y) &= \frac{2y}{2\sqrt{x^2-2x+y^2+1}} = \frac{y}{\sqrt{x^2-2x+y^2+1}}. \end{aligned}$$

Stacionarne točke so rešitve sistema

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 0, \\ f_y(x,y) &= 0. \end{aligned}$$

Edina stacionarna točka je torej $(1,0)$.

c. Gradient funkcije f je enak

$$(\mathrm{grad} f)(x,y) = \left(\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+y^2+1}}, \frac{y}{\sqrt{x^2-2x+y^2+1}}\right).$$

V točki $(0,1)$ torej dobimo

$$(\mathrm{grad} f)(x,y) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Rešitev naloge 80.

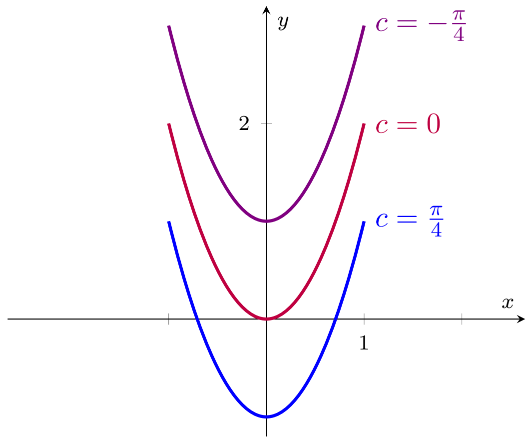
a. Iz enačbe $f(x,y)=c$ dobimo

$$\arctan\left(2x^2-y\right) = c$$

oziroma

$$y = 2x^2 - \tan c.$$

Ker je $\tan\left(\pm\frac{\pi}{4}\right) = \pm 1$ in $\tan(0) = 0$, je pri $c=0$ nivojnica parabola $y=2x^2$, pri $c=\pm\frac{\pi}{4}$ pa paraboli $y=2x^2\mp 1$.



b. Parcialna odvoda sta

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{4x}{1+(y-2x^2)^2}, \\ f_y(x,y) &= \frac{-1}{1+(y-2x^2)^2}. \end{aligned}$$

Rešitev naloge 81.

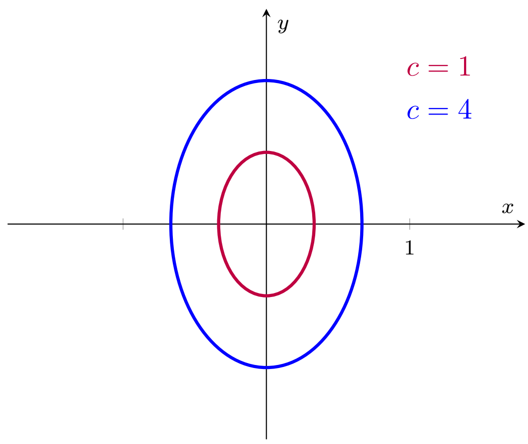
a. Iz enačbe za nivojnice $f(x,y) = c$ pri $c = 1$ in $c = 4$ dobimo

$$9x^2 + 4y^2 = 1 \quad \text{in} \quad 9x^2 + 4y^2 = 4$$

oziroma

$$\frac{x^2}{\frac{1}{9}} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1 \quad \text{in} \quad \frac{x^2}{\frac{4}{9}} + y^2 = 1.$$

Nivojnica pri $c = 1$ je torej elipsa s polosema $\frac{1}{3}$ in $\frac{1}{2}$, pri $c = 4$ pa dobimo elipso s polosema $\frac{2}{3}$ in 1.



b. Izračunamo parcialna odvoda po x in y:

$$f_x(x,y) = 18x \quad \text{in} \quad f_y(x,y) = 8y.$$

Torej je

$$(\operatorname{grad} f)(x,y) = (18x, 8y).$$

c. Ker je

$$(\operatorname{grad} f)(1,1) = (18, 8),$$

je smerni odvod v smeri vektorja $\vec{a} = (-2, 2)$ v točki $(1, 1)$ enak

$$f_{\vec{a}}(1,1) = \frac{(18,8)\cdot(-2,2)}{\sqrt{(-2)^2+2^2}} = \frac{-36+16}{2\sqrt{2}} = \frac{-10}{\sqrt{2}}.$$

Ker je smerni odvod negativen, funkcija v točki $(1, 1)$ v smeri vektorja $\vec{a} = (-2, 2)$ pada.

Rešitev naloge 82.

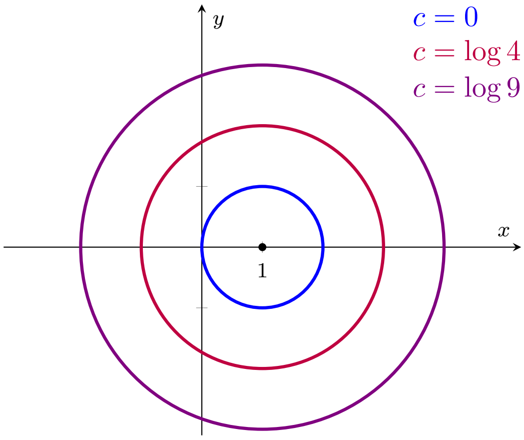
a. Ker je $(x-1)^2+y^2 \geq 0$, bo funkcija definirana povsod razen tam, kjer velja enačaj. Definicijsko območje je torej $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$.
b. Iz enačbe za nivojnice $f(x, y) = c$ dobimo

$$\log\left((x-1)^2+y^2\right) = c$$

oziroma

$$(x-1)^2+y^2 = e^c,$$

torej so nivojnice krožnice s središčem $(1, 0)$ in radiji $\sqrt{e^c}$. Pri $c = 0$ je radij enak 1, pri $c = \log(4)$ je radij enak 2, pri $c = \log(9)$ je radij enak 3.



c. Izračunamo parcialna odvoda

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{2(x-1)}{(x-1)^2+y^2}, \\ f_y(x,y) &= \frac{2y}{(x-1)^2+y^2}. \end{aligned}$$

Gradient v točki $(0, 1)$ je torej enak

$$(\mathrm{grad} f)(0,1) = \left(\frac{-2}{(-1)^2+1^2}, \frac{2}{(-1)^2+1^2}\right) = (-1,\ 1).$$

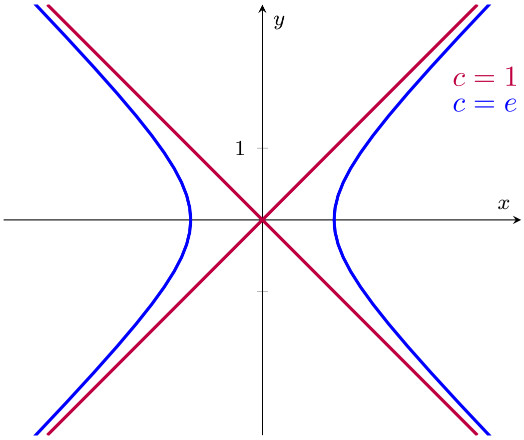
Smerni odvod v smeri proti koordinatnemu izhodišču, tj. v smeri vektorja $\vec{a} = (0, -1)$, je

$$\frac{(-1,1)\cdot(0,-1)}{\sqrt{0^2+(-1)^2}} = -1.$$

d. Funkcija v točki $(0, 1)$ najhitreje pada v smeri $-(\mathrm{grad} f)(0, 1)$, tj. v smeri vektorja $(1,\ -1)$.

Rešitev naloge 83.

a. Iz enačbe za nivojnice $e^{x^2-y^2} = c$ dobimo $x^2 - y^2 = \log(c)$. Nivojnice so v splošnem torej hiperbole. Pri $c = 1$ dobimo $x^2 - y^2 = 0$, zato sta v tem primeru nivojnici premici $y = x$ in $y = -x$ (simetrali kvadrantov). Pri $c = e$ res dobimo hiperbolo, in sicer $x^2 - y^2 = 1$.



b. Najprej izračunamo oba parcialna odvoda:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2xe^{x^2-y^2}, \\ f_y(x,y) &= -2ye^{x^2-y^2}. \end{aligned}$$

Ker je $e^{x^2-y^2} > 0$ za vse x in y, bosta parcialna odvoda enaka 0 natanko tedaj, ko bo $2x = -2y = 0$. Edina stacionarna točka je torej $(0,0)$.

c. Gradient funkcije f je enak

$$(\mathrm{grad} f)(x,y) = (2xe^{x^2-y^2},\ -2ye^{x^2-y^2}),$$

zato je

$$(\mathrm{grad} f)(1,1) = (2e^{1^2-1^2},\ -2e^{1^2-1^2}) = (2e^0,\ -2e^0) = (2,\ -2).$$

Iskani smerni odvod je torej enak

$$\frac{(2,-2)\cdot(0,2)}{|(0,2)|} = \frac{2\cdot 0 + (-2)\cdot 2}{\sqrt{0^2+2^2}} = \frac{-4}{2} = -2.$$

Rešitev naloge 84.

a. Funkcija je definirana na tisti podmnožici ravnine, za katero je $x^2 + y^2 - 2x \geq 0$. Če na obeh straneh neenakosti prištejemo 1 in izraz preoblikujemo, dobimo

$$(x-1)^2 + y^2 \geq 1.$$

Definicijsko območje je torej zunanjost kroga s središčem $S(1,0)$ in radijem 1 (vključno z robno krožnico).

b. Iz enačbe za nivojnice $f(x,y) = c$ dobimo

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 2x} = c.$$

Izraz kvadriramo in na obeh straneh prištejemo 1, potem pa levo stran spet zapišemo kot vsoto kvadratov. Dobimo

$$(x-1)^2 + y^2 = c^2 + 1.$$

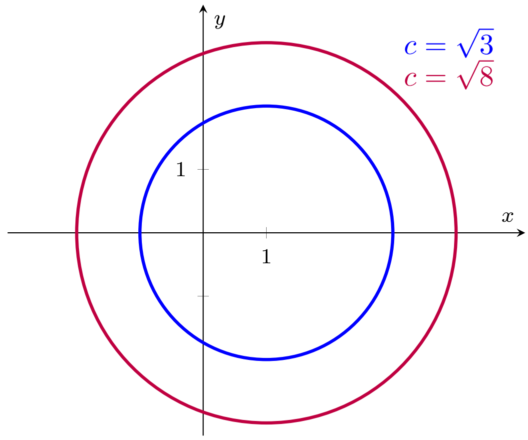
Pri $c = \sqrt{3}$ je nivojnica krožnica z enačbo

$$(x-1)^2 + y^2 = 4,$$

pri $c = \sqrt{8}$ pa krožnica z enačbo

$$(x-1)^2 + y^2 = 9.$$

Dobimo torej krožnici s središčem $(1, 0)$ in radijema 2 oziroma 3.



c. Parcialna odvoda sta

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+y^2}}, \\ f_y(x,y) &= \frac{y}{\sqrt{x^2-2x+y^2}}, \end{aligned}$$

torej je

$$(\mathrm{grad} f)(x,y) = \left(\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2-2x+y^2}} \right).$$

d. Funkcija najhitreje pada v smeri $-(\mathrm{grad} f)(x,y)$. V točki $(2,2)$ je torej smer najhitrejšega padanja enaka

$$-(\mathrm{grad} f)(2,2) = -\left(\frac{1}{\sqrt{4}}, \frac{2}{\sqrt{4}} \right) = \left(-\frac{1}{2}, -1 \right).$$

Rešitev naloge 85.

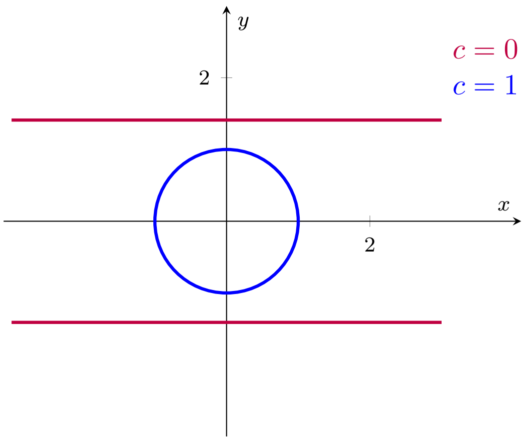
a. Iz enačbe $f(x,y) = c$ dobimo

$$\frac{2-y^2}{1+x^2} = c$$

oziroma po preoblikovanju

$$cx^2 + y^2 = 2 - c.$$

Pri $c = 0$ dobimo $y^2 = 2$, kar ustreza premicama $y = \pm\sqrt{2}$. Pri $c = 1$ dobimo krožnico $x^2 + y^2 = 1$.



b. Parcialna odvoda sta enaka

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{2x(y^2-2)}{(1+x^2)^2}, \\ f_y(x,y) &= -\frac{2y}{1+x^2}. \end{aligned}$$

V točki (x, y) je torej gradient enak

$$(\mathrm{grad} f)(x,y) = \left(\frac{2x(y^2-2)}{(1+x^2)^2},\ -\frac{2y}{1+x^2}\right)$$

in v točki $(1, 1)$ dobimo

$$(\mathrm{grad} f)(1,1) = \left(\frac{2(-1)}{(2)^2},\ -\frac{2}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2},\ -1\right).$$

c. Funkcija najhitreje narašča v smeri gradienta. V točki $(1, 1)$ torej najhitreje narašča v smeri $\left(-\frac{1}{2},\ -1\right)$.

Rešitev naloge 86.

a. Najprej izračunamo parcialna odvoda

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 4x^3+4y, \\ f_y(x,y) &= 4x+4y^3. \end{aligned}$$

Stacionarne točke so rešitev sistema

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 0, \\ f_y(x,y) &= 0, \end{aligned}$$

torej mora veljati

$$\begin{aligned} x^3+y &= 0, \\ x+y^3 &= 0. \end{aligned}$$

Iz prve enačbe izrazimo $y = -x^3$ in to vstavimo v drugo, pa dobimo $x - x^9 = 0$ oziroma

$$x(1-x^8) = 0.$$

Realne rešitve te enačbe so $x = 0$, $x = 1$ in $x = -1$. Izračunamo še pripadajoče y in dobimo stacionarne točke $(0,0)$, $(1,-1)$ in $(-1,1)$. Zdaj pa izračunamo še druge odvode

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= 12x^2, \\ f_{xy}(x,y) &= 4, \\ f_{yy}(x,y) &= 12y^2, \end{aligned}$$

in dobimo Hessejevo matriko

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} 12x^2 & 4 \\ 4 & 12y^2 \end{bmatrix}$$

z determinanto

$$\det H(x,y) = 144x^2y^2 - 16.$$

Očitno je levi zgornji element v Hessejevi matriki pozitiven v točkah $(1,-1)$ ter $(-1,1)$ in enak 0 v točki $(0,0)$. Izračunamo še $\det H(1,-1) = 128 > 0$, $\det H(-1,1) = 128 > 0$ in $\det H(0,0) = -16 < 0$. Točki $(1,-1)$ in $(-1,1)$ sta torej minimuma, točka $(0,0)$ pa sedlo.

b. Gradient funkcije f je enak

$$(\mathrm{grad} f)(x,y) = (4x^3 + 4y,\ 4x + 4y^3),$$

torej je

$$(\mathrm{grad} f)(1,1) = (8,\ 8) = \vec{g}.$$

Ker kaže vektor $\vec{a}$ v smeri gradienta $\vec{g}$ v točki $(1,1)$, bo smerni odvod v tej točki v smeri $\vec{a}$ enak velikosti gradienta $|\vec{g}|$. Torej je

$$f_{\vec{g}}(1,1) = |(8,8)| = \sqrt{8^2+8^2} = 8\sqrt{2}.$$

Poleg tega v smeri gradienta vrednosti funkcije seveda naraščajo.

Rešitev naloge 87. ⇧

a. Iz enačbe za nivojnice

$$\frac{x}{x^2+y^2+1} = c$$

pri $c = 0$ dobimo $x = 0$. Nivojnica je v tem primeru kar premica, in sicer ravno ordinatna os. Pri $c = \frac{1}{4}$ dobimo enačbo

$$\frac{x}{x^2+y^2+1} = \frac{1}{4},$$

ki jo preoblikujemo v $4x = x^2 + y^2 + 1$ oziroma

$$x^2 - 4x + y^2 + 1 = 0.$$

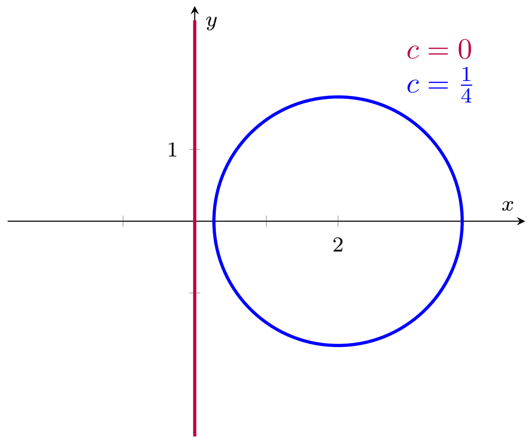
Na obeh straneh prištejemo 3 in dobimo

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 3.$$

Opazimo, da lahko levo stran dopolnimo do vsote kvadratov,

$$(x-2)^2 + y^2 = 3,$$

to pa je enačba krožnice s središčem v $(2,0)$ in radijem $\sqrt{3}$.



b. Izračunamo parcialna odvoda:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{1-x^2+y^2}{(1+x^2+y^2)^2}, \\ f_y(x,y) &= \frac{-2xy}{(1+x^2+y^2)^2}. \end{aligned}$$

Gradient je torej enak

$$(\operatorname{grad} f)(x,y) = \left(\frac{1-x^2+y^2}{(1+x^2+y^2)^2}, \frac{-2xy}{(1+x^2+y^2)^2}\right)$$

c. Stacionarne točke so rešitve sistema

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 0, \\ f_y(x,y) &= 0. \end{aligned}$$

Ta ulomka bosta enaka 0 natanko tedaj, ko bosta števca enaka 0, torej dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} 1-x^2+y^2 &= 0, \\ -2xy &= 0. \end{aligned}$$

Iz druge enačbe razberemo, da mora biti $x = 0$ ali $y = 0$. Če je $x = 0$, dobimo iz prve enačbe $1 + y^2 = 0$, kar ne velja za noben realen y. Če pa je $y = 0$, dobimo iz prve enačbe $1 - x^2 = 0$, torej je $x = \pm 1$. Stacionarni točki sta torej $(1, 0)$ in $(-1, 0)$.
Izračunamo še druge odvode:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= \frac{2x(x^2-3-3y^2)}{(1+x^2+y^2)^3}, \\ f_{xy}(x,y) &= \frac{-2y(1-3x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^3}, \\ f_{yy}(x,y) &= \frac{-2x(1+x^2-3y^2)}{(1+x^2+y^2)^3}. \end{aligned}$$

V točkah $(\pm 1, 0)$ je

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= \frac{\pm 2(-2)}{8} = \mp\frac{1}{2}, \\ f_{xy}(x,y) &= 0, \\ f_{yy}(x,y) &= \frac{\mp 2 \cdot 2}{8} = \mp\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Hessejeva matrika v točki $(1,0)$ je torej enaka

$$H(1,0) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

in njena determinanta je enaka $(\det H)(1,0) = \frac{1}{4}$. Točka $(1,0)$ je zato lokalni maksimum.
Hessejeva matrika v točki $(-1,0)$ je enaka

$$H(-1,0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

in njena determinanta je enaka $(\det H)(-1,0) = \frac{1}{4}$. Točka $(-1,0)$ je lokalni minimum.

Rešitev naloge 88.

a. Površina kvadra s stranicami a, b in c je $S = 2ab + 2ac + 2bc$, volumen pa $V = abc$. Iz enakosti $V = abc = 1$ izrazimo $c = \frac{1}{ab}$ in definiramo funkcijo

$$S(a,b) = 2ab + \frac{2}{b} + \frac{2}{a}\ .$$

b. Iščemo maksimum funkcije dveh spremenljivk $S(a,b)$, zato izračunamo oba parcialna odvoda, ki morata biti v stacionarnih točkah oba enaka 0:

$$\begin{aligned} S_a &= 2b - \frac{2}{a^2} = 0, \\ S_b &= 2a - \frac{2}{b^2} = 0. \end{aligned}$$

Iz prve enačbe izrazimo $b = \frac{1}{a^2}$ in to vstavimo v drugo enačbo. Dobimo

$$\begin{aligned} 2a - \frac{2}{\left(\frac{1}{a^2}\right)^2} &= 0, \\ a - a^4 &= 0, \\ a(1-a^3) &= 0. \end{aligned}$$

Rešitev $a = 0$ ni dobra, ker v tem primeru ne bi veljalo $V = abc = 1$, torej je $1 - a^3 = 0$ oziroma $a = 1$. Iz zveze $b = \frac{1}{a^2}$ zato sledi, da je tudi $b = 1$, nazadnje pa je še $c = \frac{1}{ab} = 1$. Kvader z največjo možno površino pri danem volumnu je torej kocka.

Rešitev naloge 89.

Definiramo funkcijo treh spremenljivk

$$F(x,y,\lambda) = xy + \lambda(3x^2 + y^2 - 6).$$

Izračunamo vse tri parcialne odvode prvega reda in upoštevamo, da so stacionarne točke tiste, v katerih so vsi trije odvodi enaki 0:

$$\begin{aligned} f_x(x,y,\lambda) &= y + 6x\lambda = 0, \\ f_y(x,y,\lambda) &= x + 2y\lambda = 0, \\ f_\lambda(x,y,\lambda) &= 3x^2 + y^2 - 6 = 0. \end{aligned}$$

Iz prve enakosti izrazimo $y = -6x\lambda$ in vstavimo v drugo. Dobimo

$$0 = x + 2y\lambda = x + 2(-6x\lambda)\lambda = x - 12x\lambda^2 = x(1 - 12\lambda^2).$$

Če bi bil $x = 0$, bi iz prve zveze sledilo še $y = 0$, a potem ne bi bila izpolnjena tretja enakost. Torej je $1 - 12\lambda^2 = 0$ in je $\lambda = \pm\frac{1}{2\sqrt{3}}$. To vstavimo nazaj v prvo zvezo in dobimo $y = \pm\sqrt{3}\, x$. Če to vstavimo v tretjo enačbo, dobimo

$$\begin{aligned} 3x^2 + (\pm\sqrt{3}\, x)^2 - 6 &= 0, \\ 3x^2 + 3x^2 &= 6, \\ x^2 &= 1, \end{aligned}$$

oziroma $x = \pm 1$ in nazadnje še $y = \pm\sqrt{3}$. Stacionarne točke so torej $(\pm 1, \pm\sqrt{3})$. Izračunamo še vrednosti funkcije f v teh točkah in vidimo, da je

$$f(1, \sqrt{3}) = f(-1, -\sqrt{3}) = \sqrt{3},$$

$$f(1, -\sqrt{3}) = f(-1, \sqrt{3}) = -\sqrt{3}.$$

Prvi dve točki sta torej maksimuma, drugi dve pa minimuma.

Rešitev naloge 90.

Definiramo funkcijo treh spremenljivk

$$F(x, y, \lambda) = 4x - 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 20).$$

Izračunamo vse tri parcialne odvode prvega reda in upoštevamo, da so stacionarne točke tiste, v katerih so vsi trije odvodi enaki 0:

$$\begin{aligned} f_x(x, y, \lambda) &= 4 + 2x\lambda = 0, \\ f_y(x, y, \lambda) &= -2 + 2y\lambda = 0, \\ f_\lambda(x, y, \lambda) &= x^2 + y^2 - 20 = 0. \end{aligned}$$

Iz prve enakosti izrazimo $x = -\frac{2}{\lambda}$, iz druge pa $y = \frac{1}{\lambda}$. Oboje vstavimo v tretjo enakost in dobimo

$$\frac{4}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 20$$

oziroma $\lambda^2 = \frac{1}{4}$. Torej je $\lambda = \pm\frac{1}{2}$. Če je $\lambda = \frac{1}{2}$, potem je $x = -4$ in $y = 2$. Če je $\lambda = -\frac{1}{2}$, potem je $x = 4$ in $y = -2$. Ker je $f(4, -2) = 20$ in $f(-4, 2) = -20$, je $(4, -2)$ maksimum, $(-4, 2)$ pa minimum.

7. Integral

Rešitev naloge 91.

a. Stacionarne točke so ničle odvoda. Najprej izračunamo

$$f'(x) = \frac{(x)'(1 + x^2) - x(1 + x^2)'}{(1 + x^2)^2} = \frac{1 + x^2 - 2x^2}{(1 + x^2)^2} = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}.$$

Ničli števca in s tem ničli odvoda sta $x = 1$ in $x = -1$.

b. Integral izračunamo s pomočjo substitucije $t = 1 + x^2$, $dt = 2x\, dx$. Dobimo

$$\int \frac{x}{1 + x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\, dt = \frac{1}{2}\log|t| + c = \frac{1}{2}\log|1 + x^2| + c.$$

Rešitev naloge 92.

Pišimo
$$I = \int \frac{2x - \sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$
Najprej iskani integral razbijemo na dva dela,
$$I = \int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx - \int \frac{\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = I_1 - I_2.$$
Za izračun I_1 uporabimo novo spremenljivko $t = 1 - x^2$, $dt = -2x\, dx$. Dobimo
$$I_1 = -\int \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt = -\int t^{-\frac{1}{2}}\, dt = -2t^{\frac{1}{2}} + c = -2\sqrt{t} + c = -2\sqrt{1-x^2} + c.$$
Za izračun I_2 uporabimo novo spremenljivko $t = \arcsin x$, $dt = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$. Dobimo
$$I_2 = \int \sqrt{t}\, dt = \int t^{\frac{1}{2}}\, dt = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{t^3} + c = \frac{2}{3}\sqrt{(\arcsin x)^3} + c.$$
Torej je
$$I = I_1 - I_2 = -2\sqrt{1-x^2} - \frac{2}{3}\sqrt{(\arcsin x)^3} + c.$$

Rešitev naloge 93.

a. Prvi integral izračunamo z metodo integracije po delih. Pišemo $u = x$, $dv = \sin x\, dx$ ter $du = dx$, $v = -\cos x$. Tedaj je
$$\int x \sin(x)\, dx = -x\cos x + \int \cos x\, dx = -x\cos x + \sin x + c.$$
b. Pri izračunu drugega integrala vpeljemo novo spremenljivko $t = x^2$, $dt = 2x\, dx$. Iz druge enakosti izrazimo še $x\, dx = \frac{1}{2}\, dt$ in dobimo
$$\int x\sin(x^2)\, dx = \int \frac{1}{2}\sin t\, dt = -\frac{1}{2}\cos t + c = -\frac{1}{2}\cos x^2 + c.$$

Rešitev naloge 94.

a. Izraz odvajamo po pravilu za odvajanje ulomkov in upoštevamo, da je
$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$
pa dobimo
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = \\ &= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}. \end{aligned}$$
b. Vpeljemo novo spremenljivko $t = \sin x$, $dt = \cos x\, dx$. Tedaj je
$$\int f(x)\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx = \int \frac{1}{t}\, dt = \log|t| + c = \log|\sin x| + c.$$
c. Pri tej točki si pomagamo s prejšnjima. Spremenljivki za integracijo po delih bosta $u = x$ in $v = -f(x) = -\frac{\cos x}{\sin x}$, pripadajoča diferenciala pa $du = dx$ in $dv = \frac{1}{\sin^2 x}\, dx$ (tu uporabimo rezultat iz prvega dela naloge). Ko izvedemo integracijo po delih in uporabimo še rezultat iz drugega dela naloge, dobimo
$$\int \frac{x}{\sin^2 x}\, dx = -\frac{x\cos x}{\sin x} + \int f(x)\, dx = -\frac{x\cos x}{\sin x} + \log|\sin x| + c.$$

Rešitev naloge 95.

a. Integral racionalne funkcije izračunamo tako, da integrand najprej razbijemo na parcialne ulomke. Pišimo

$$\frac{4}{x^2+2x} = \frac{4}{x(x+2)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+Bx}{x(x+2)} = \frac{x(A+B)+2A}{x^2+2x}.$$

Prvi in zadnji ulomek sta enaka in imata enaka imenovalca, zato morata imeti tudi enaka števca: $4 = x(A+B)+2A$. To pa velja natanko tedaj, ko je

$$\begin{aligned} A+B &= 0, \\ 2A &= 4. \end{aligned}$$

Torej je $A = 2$, $B = -2$ in

$$\frac{4}{x^2+2x} = \frac{2}{x} - \frac{2}{x+2}.$$

Končno lahko izračunamo še

$$\begin{aligned} \int \frac{4}{x^2+2x}\, dx &= \int \frac{2}{x} - \frac{2}{x+2}\, dx = \\ &= \int \frac{2}{x}\, dx - \int \frac{2}{x+2}\, dx = \\ &= 2\log|x| - 2\log|x+2| + c. \end{aligned}$$

b. Drugi integral izračunamo z metodo integracije po delih. Naj bo

$$u = \log x, \quad dv = x\, dx \quad \text{in} \quad du = \frac{1}{x}\, dx, \quad v = \frac{x^2}{2}\ .$$

Potem je

$$\begin{aligned} \int x\log(x)\, dx &= u\cdot v - \int v\, du = \frac{x^2\log x}{2} - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\, dx = \\ &= \frac{x^2\log x}{2} - \frac{1}{2}\int x\, dx = \frac{x^2\log x}{2} - \frac{x^2}{4} + c. \end{aligned}$$

Rešitev naloge 96.

a. Najprej s pomočjo substitucije $t = -\frac{x}{2}$, $dt = -\frac{1}{2}\, dx$, izračunamo

$$\int e^{-\frac{x}{2}}\, dx = -2\int e^t\, dt = -2e^t + c = -2e^{-\frac{x}{2}} + c.$$

Iskani integral izračunamo z metodo integracije po delih. Naj bo

$$u = x, \quad dv = e^{-\frac{x}{2}}\, dx \quad \text{in} \quad du = dx, \quad v = -2e^{-\frac{x}{2}}.$$

Dobimo

$$\int xe^{-\frac{x}{2}}\, dx = -2xe^{-\frac{x}{2}} - \int -2e^{-\frac{x}{2}}\, dx = -2xe^{-\frac{x}{2}} - 4e^{-\frac{x}{2}} + c = -2e^{-\frac{x}{2}}(x+2) + c.$$

b. Uvedemo novo spremenljivko $t = \pi\log x$, $dt = \frac{\pi}{x}\, dx$. Pri $x = 1$ je $t = 0$, pri $x = e$ je $t = \pi$. Torej je

$$\int_1^e \frac{\cos(\pi\log x)}{x}\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos t\, dt = \frac{1}{\pi}\sin t\Big|_0^\pi = 0 - 0 = 0.$$

Rešitev naloge 97.

Upoštevamo, da je $t = \log x$, $dt = \frac{1}{x}\,dx$. Dobimo

$$\int \frac{1}{x\log^2(x)}\,dx \;=\; \int \frac{1}{t^2}\,dt \;=\; -\frac{1}{t}+c \;=\; -\frac{1}{\log x}+c.$$

Definicijsko območje integranda je $(0,1)\cup(1,\infty)$. Na intervalu (e,∞) je torej edina singularnost pri ∞. Enako velja za funkcijo $-\frac{1}{\log x}$. Zato je

$$\int_e^\infty \frac{1}{x\log^2(x)}\,dx \;=\; -\frac{1}{\log x}\Big|_e^\infty \;=\; \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{\log x}\right)+\frac{1}{\log e} \;=\; 0+1 \;=\; 1.$$

Rešitev naloge 98.

S substitucijo $t=\frac{1}{x}$, $dt=-\frac{1}{x^2}\,dx$, dobimo

$$\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx \;=\; -\int e^t\,dt \;=\; -e^t+c \;=\; -e^{\frac{1}{x}}+c.$$

Funkciji $f(x)=\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$ in $-e^{\frac{1}{x}}$ sta definirani na $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Zato je

$$\int_0^1 f(x)\,dx \;=\; -e^{\frac{1}{x}}\Big|_0^1 \;=\; -e+\lim_{x\searrow 0} e^{\frac{1}{x}} \;=\; -e+\infty \;=\; \infty$$

in

$$\int_1^\infty f(x)\,dx \;=\; -e^{\frac{1}{x}}\Big|_1^\infty \;=\; -\lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}}+e \;=\; -1+e \;=\; e-1.$$

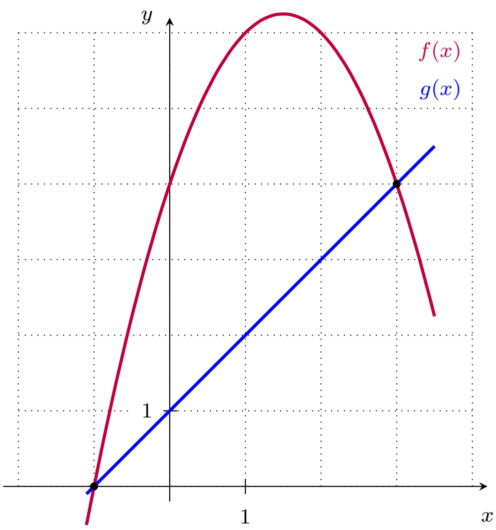
8. Uporaba integrala

Rešitev naloge 99.

Najprej določimo vsa presečišča med krivuljama:

$$\begin{aligned} x+1 &= -x^2+3x+4,\\ x^2-2x-3 &= 0,\\ (x+1)(x-3) &= 0. \end{aligned}$$

Krivulji se sekata pri $x=-1$ in $x=3$.



Ploščino območja med krivuljama dobimo po formuli

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx.$$

Ker graf funkcije f na intervalu $[-1, 3]$ leži nad grafom funkcije g, je v teh mejah

$$|f(x) - g(x)| = f(x) - g(x).$$

Zato je

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{3} f(x) - g(x)\, dx = \int_{-1}^{3} -x^2 + 3x + 4 - (x+1)\, dx = \\ &= \int_{-1}^{3} -x^2 + 2x + 3\, dx = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \Big|_{-1}^{3} = \\ &= -\frac{27}{3} + 9 + 9 - \left(\frac{1}{3} + 1 - 3\right) = \frac{32}{3}. \end{aligned}$$

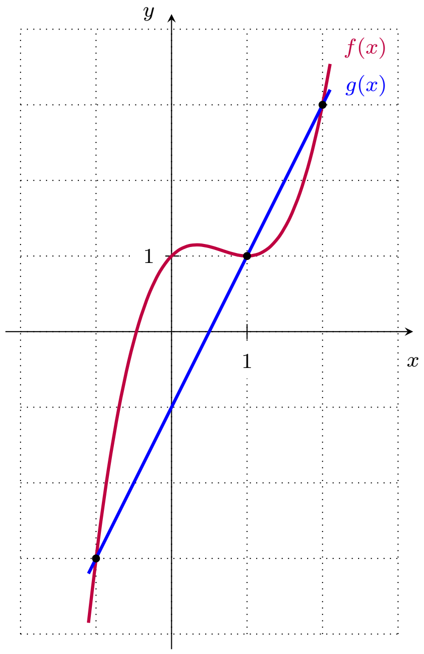
Rešitev naloge 100.

a. Če izenačimo $f(x) = g(x)$, dobimo

$$\begin{aligned} x^3 - 2x^2 + x + 1 &= 2x - 1, \\ x^3 - 2x^2 - x + 2 &= 0, \\ x^2(x-2) - (x-2) &= 0, \\ (x-2)(x^2-1) &= 0, \\ (x-2)(x-1)(x+1) &= 0. \end{aligned}$$

Dobljene tri možne vrednosti za x vstavimo v predpis za funkcijo g in dobimo še pripadajoče y. Presečišča so $(-1, -3)$, $(1, 1)$ in $(2, 3)$.

b. Grafa funkcij f in g določata dve omejeni območji.



c. Ploščino območja med krivuljama dobimo po formuli

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx.$$

Ker je

$$|f(x)-g(x)| = \begin{cases} f(x)-g(x), & x\in[-1,1], \\ g(x)-f(x), & x\in[1,2], \end{cases}$$

moramo izračunati

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-1}^{1} f(x)-g(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x^3-2x^2-x+2\,dx = \\ &= \frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\,\Big|_{-1}^{1} = \\ &= \frac{1}{4}-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+2-\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}-2\right) = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

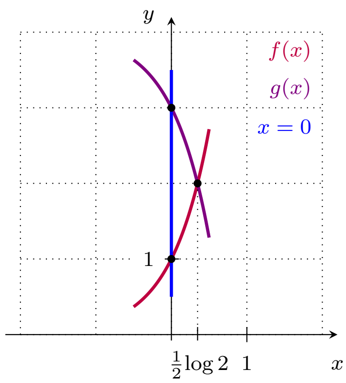
in

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{1}^{2} g(x)-f(x)\,dx = \int_{1}^{2} -x^3+2x^2+x-2\,dx = \\ &= -\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\,\Big|_{1}^{2} = \\ &= -\frac{16}{4}+\frac{16}{3}+\frac{4}{2}-4-\left(-\frac{1}{4}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-2\right) = \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

Skupna ploščina obeh območij je torej

$$S = S_1+S_2 = \frac{8}{3}+\frac{5}{12} = \frac{37}{12}.$$

Rešitev naloge 101.



Izračunajmo presečišče obeh krivulj:

$$\begin{aligned} e^{2x} &= -e^{2x}+4, \\ 2e^{2x} &= 4, \\ e^{2x} &= 2, \\ 2x &= \log 2, \\ x &= \frac{1}{2}\log 2. \end{aligned}$$

Izračunati moramo torej določeni integral

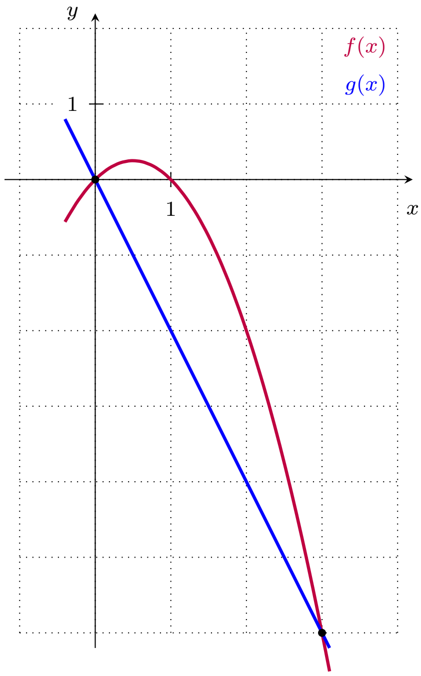
$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{1}{2}\log 2} -e^{2x} + 4 - e^{2x}\; dx = \int_0^{\frac{1}{2}\log 2} -2e^{2x} + 4\; dx = \\ &= -e^{2x} + 4x \Big|_0^{\frac{1}{2}\log 2} = -e^{\log 2} + 2\log 2 - (-e^0 + 0) = \\ &= -2 + \log 4 + 1 = \log 4 - 1. \end{aligned}$$

Rešitev naloge 102.

Najprej določimo vsa presečišča med krivuljama:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x), \\ x - x^2 &= -2x, \\ x^2 - 3x &= 0, \\ x(x-3) &= 0. \end{aligned}$$

Grafa se torej sekata pri $x = 0$ in $x = 3$.



Ploščino območja med krivuljama dobimo po formuli

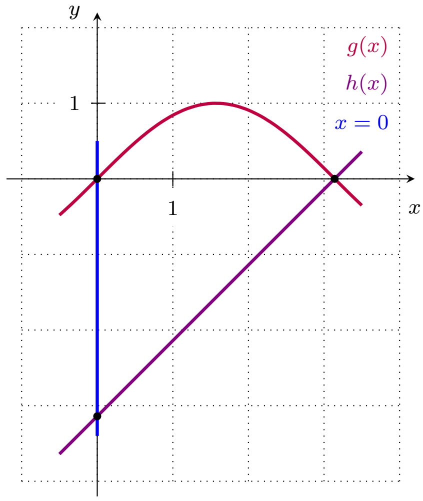
$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\; dx.$$

Na intervalu $[0, 3]$ je $|f(x) - g(x)| = f(x) - g(x)$, torej je

$$\begin{aligned} S &= \int_0^3 x - x^2 - (-2x)\; dx = \int_0^3 3x - x^2\; dx = \\ &= \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big|_0^3 = \frac{3\cdot 9}{2} - \frac{27}{3} - (0 - 0) = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Rešitev naloge 103.

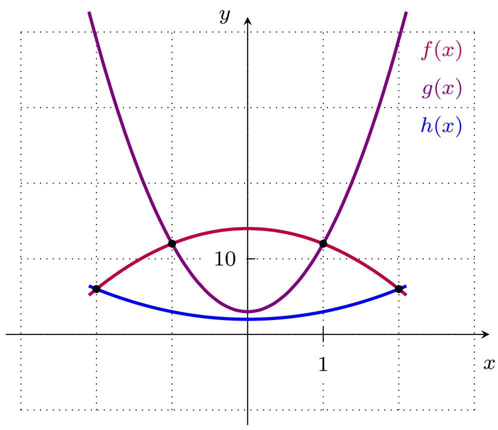
Grafa funkcij g in h se očitno sekata pri $x = \pi$. Prav tako je očitno, da edina možna presečišča ležijo na intervalu $[\pi - 1, \pi + 1]$, saj so drugje vrednosti funkcije h večje od 1 ali pa manjše od -1. Ker je na tem intervalu funkcija g strogo padajoča in funkcija h strogo naraščajoča, je $x = \pi$ tudi edino presečišče.



Izračunati moramo

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} g(x)-h(x)\;dx &= \int_0^{\pi}\sin x - x+\pi\;dx = -\cos x-\frac{x^2}{2}+\pi x\,\Big|_0^{\pi} = \\ &= -\cos\pi-\frac{\pi^2}{2}+\pi^2-(-\cos 0-0+0) = 2+\frac{\pi^2}{2}.\end{aligned}$$

Rešitev naloge 104.



Izračunamo presečišča grafov funkcij f in g:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x),\\ 14-2x^2 &= 9x^2+3,\\ 11 &= 11x^2,\\ x^2 &= 1,\\ x &= \pm 1.\end{aligned}$$

Podobno ugotovimo, da se grafa funkcij f in h sekata pri $x = \pm 2$. Grafa funkcij g in h se ne sekata. Ker so vse funkcije sode, izračunamo

$$\begin{aligned} S &= 2\int_0^1 g(x) - h(x)\ dx + 2\int_1^2 f(x) - h(x)\ dx = \\ &= 2\int_0^1 8x^2 + 1\ dx + 2\int_1^2 12 - 3x^2\ dx = \\ &= 2(\frac{8x^3}{3} + x)\Big|_0^1 + 2(12x - x^3)\Big|_1^2 = \\ &= 2\left(\frac{8}{3} + 1\right) + 2(24 - 8 - (12 - 1)) = \frac{52}{3}. \end{aligned}$$

Rešitev naloge 105.

Funkcija f je soda, zato je

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx = 2\int_0^{\pi} f(x)\ dx.$$

Najprej izračunajmo pripadajoči nedoločeni integral. Uporabimo metodo integracije po delih. Naj bo $u = x$ in $dv = \sin x\ dx$. Potem je $du = dx$ in $v = -\cos x$. Zato je

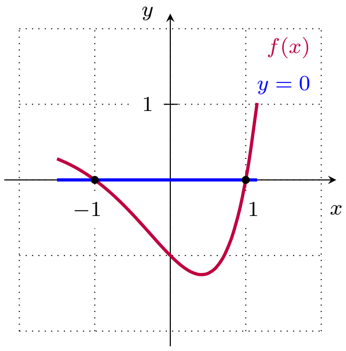
$$\int x \sin x\ dx = -x\cos x + \int \cos x\ dx = -x\cos x + \sin x + c.$$

Tako je iskana ploščina enaka

$$\begin{aligned} 2\int_0^{\pi} f(x)\ dx &= 2(-x\cos x + \sin x)\Big|_0^{\pi} = \\ &= 2(-\pi\cos\pi + \sin\pi) - 2(-0 + \sin 0) = 2\pi. \end{aligned}$$

Rešitev naloge 106.

a. Funkcija f ima pri $x = \pm 1$ ničli, v katerih spremeni predznak, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ in $f(0) = -1$. To zadošča, da skiciramo graf:



b. Najprej enkrat uporabimo metodo integracije po delih z $u = x^2 - 1$ in $dv = e^x\ dx$. Dobimo $du = 2x\ dx$ in $v = e^x$, torej je

$$I = \int f(x)\ dx = \int (x^2 - 1)e^x\ dx = e^x(x^2 - 1) - \int 2xe^x\ dx.$$

Za preostali integral še enkrat uporabimo metodo integracije po delih, tokrat z $u = 2x$ in $dv = e^x\ dx$. Dobimo še $du = 2\ dx$ in $v = e^x$ ter

$$\begin{aligned} I &= e^x(x^2 - 1) - (e^x \cdot 2x - \int 2e^x\ dx) = e^x(x^2 - 1) - (e^x \cdot 2x - 2e^x) = \\ &= e^x(x^2 - 1 - 2x + 2) = (x^2 - 2x + 1)e^x = (x - 1)^2 e^x. \end{aligned}$$

c. Omejeno območje je med $x = -1$ in $x = 1$, torej moramo izračunati

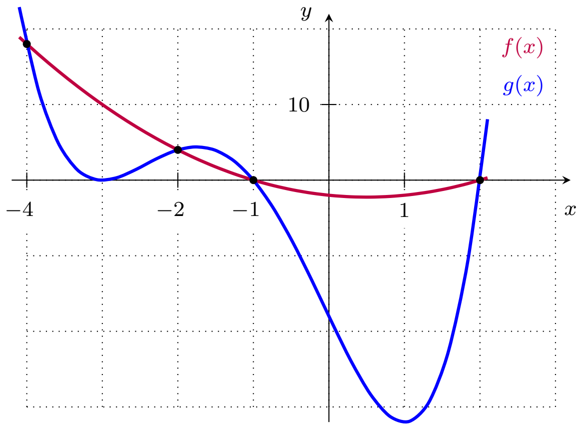
$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = (x-1)^2 e^x \Big|_{-1}^{1} = 0 - (-2)^2 e^{-1} = -\frac{4}{e}\,.$$

Iskana ploščina je torej $S = \frac{4}{e}$.

Rešitev naloge 107.

a. Grafa funkcij f in g se očitno sekata pri $x = -1$ in $x = 2$. Za ostala presečišča velja $1 = (x+3)^2$, torej je $x + 3 = \pm 1$. Dobimo še dve presečišči, in sicer pri $x = -2$ in pri $x = -4$.

b. Če upoštevamo, da sta f in g polinoma druge oziroma četrte stopnje in da poznamo vse njune ničle ter presečišča, lahko grafa brez težav narišemo:



c. Iskana ploščina je sestavljena iz treh delov.

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-4}^{-2} f(x) - g(x)\,dx = \int_{-4}^{-2} -x^4 - 5x^3 + 20x + 16\,dx = \\ &= -\frac{x^5}{5} - \frac{5x^4}{4} + 10x^2 + 16x \Big|_{-4}^{-2} = \\ &= \frac{32}{5} - 20 + 40 + (-32) - \left(\frac{1024}{5} - 320 + 160 - 64\right) = 13 + \frac{3}{5}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{-2}^{-1} g(x) - f(x)\,dx = \int_{-2}^{-1} x^4 + 5x^3 - 20x - 16\,dx = \\ &= \frac{x^5}{5} + \frac{5x^4}{4} - 10x^2 - 16x \Big|_{-2}^{-1} = \\ &= -\frac{1}{5} + \frac{5}{4} - 10 + 16 - \left(-\frac{32}{5} + 20 - 40 + 32\right) = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_3 &= \int_{-1}^{2} f(x) - g(x)\,dx = \int_{-1}^{2} -x^4 - 5x^3 + 20x + 16\,dx = \\ &= -\frac{x^5}{5} - \frac{5x^4}{4} + 10x^2 + 16x \Big|_{-1}^{2} = \\ &= -\frac{32}{5} - \frac{80}{4} + 40 + 32 - \left(\frac{1}{5} - \frac{5}{4} + 10 - 16\right) = \\ &= -\frac{33}{5} + 59 + \frac{1}{4} = 52 + \frac{2}{5} + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

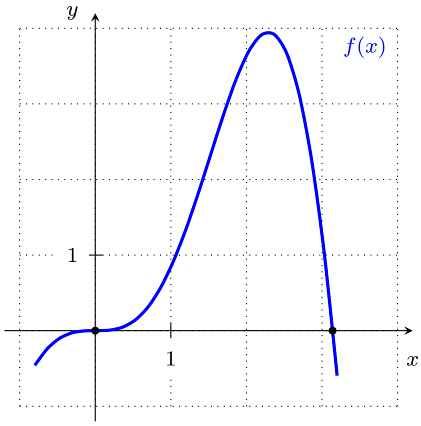
Tako je

$$\begin{aligned} S &= S_1+S_2+S_3 = 13+\frac{3}{5}+1+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+52+\frac{2}{5}+\frac{1}{4} = \\ &= 66+\frac{2}{4}+\frac{6}{5} = 66+\frac{10}{20}+\frac{24}{20} = 66+\frac{34}{20} = 67+\frac{7}{10}. \end{aligned}$$

Rešitev naloge 108.

Vpeljemo novo spremenljivko $t = 1 - x^2$. Potem je $dt = -2x\ dx$ oziroma $x\ dx = -\frac{1}{2}\ dt$. Dobimo

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}\ dt = -\frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}}\cdot 2 + c = -\sqrt{t}+c = -\sqrt{1-x^2}+c.$$



Izračunati moramo še

$$S = \int_0^{\pi} x^2 \sin x\ dx.$$

Najprej izračunajmo nedoločeni integral z večkratno uporabo metode integriranja po delih. Naj bo najprej $u = x^2$ in $dv = \sin x\ dx$. Dobimo še $du = 2x\ dx$ in $v = -\cos x$, zato je

$$\int x^2 \sin x\ dx = -x^2\cos x + \int 2x\cos x\ dx.$$

Za izračun preostalega integrala še enkrat uporabimo metodo integracije po delih za $u = 2x$ in $dv = \cos x\ dx$. Dobimo $du = 2\ dx$, $v = \sin x$ in

$$\begin{aligned} \int x^2\sin x\ dx &= -x^2\cos x + 2x\sin x - \int 2\sin x = \\ &= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + c = \\ &= (2-x^2)\cos x + 2x\sin x + c. \end{aligned}$$

Tako je

$$\begin{aligned} S &= (2-x^2)\cos x + 2x\sin x\,\Big|_0^{\pi} = (2-\pi^2)\cos\pi + 2\pi\sin\pi - (2\cos 0 + 0) = \\ &= -2+\pi^2-2 = \pi^2-4. \end{aligned}$$

Rešitev naloge 109.

a. Uporabimo metodo integracije po delih z $u = x-1$ in $dv = e^{-x}\ dx$. Dobimo $du = dx$, $v = -e^{-x}$ in

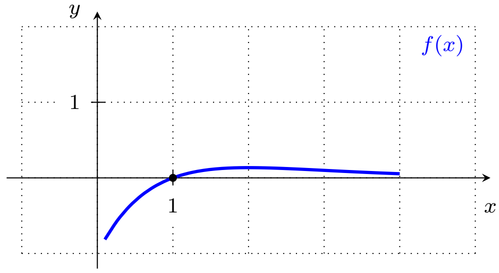
$$\int f(x)\ dx = -(x-1)e^{-x} + \int e^{-x}\ dx = (1-x)e^{-x} - e^{-x} + c = -\frac{x}{e^x}+c.$$

b. Za izračun limite pri $x \to \infty$ uporabimo l'Hospitalovo pravilo, pa dobimo

$$\int_0^\infty f(x)\,dx \;=\; -\frac{x}{e^x}\Big|_0^\infty \;=\; \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{x}{e^x}\right) - \lim_{x\to 0}\left(-\frac{x}{e^x}\right) \;=\; \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{e^x}\right) - 0 \;=\; 0.$$

c. Ploščina območja je

$$\begin{aligned}\int_0^\infty |f(x)|\,dx \;&=\; \int_0^1 -f(x)\,dx + \int_1^\infty f(x)\,dx \;=\; \frac{x}{e^x}\Big|_0^1 - \frac{x}{e^x}\Big|_1^\infty \;=\\ &=\; \frac{1}{e} - \lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x} - \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x} + \frac{1}{e} \;=\; \frac{1}{e} - 0 - 0 + \frac{1}{e} \;=\; \frac{2}{e}.\end{aligned}$$

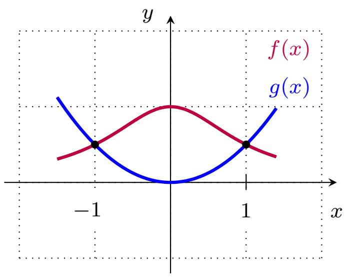


Rešitev naloge 110.

a. Najprej poiščemo vsa presečišča grafov funkcij f in g:

$$\begin{aligned} f(x) \;&=\; g(x),\\ \frac{1}{1+x^2} \;&=\; \frac{x^2}{2},\\ 2 \;&=\; x^2(1+x^2),\\ x^4+x^2-2 \;&=\; 0,\\ (x^2-1)(x^2+2) \;&=\; 0,\\ (x-1)(x+1)(x^2+2) \;&=\; 0.\end{aligned}$$

Grafa se torej sekata pri $x=1$ in $x=-1$.



Ploščina omejenega območja med grafoma je enaka

$$\begin{aligned} S \;&=\; \int_{-1}^1 f(x)-g(x)\,dx \;=\; \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2}\,dx \;=\\ &=\; \arctan x - \frac{x^3}{6}\Big|_{-1}^1 \;=\; \arctan 1 - \frac{1}{6} - \left(\arctan(-1) + \frac{1}{6}\right) \;=\\ &=\; \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6} \;=\; \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

b. Dolžino loka izračunamo po formuli

$$l = \int_a^b \sqrt{1+h'(x)^2}\,dx,$$

pri čemer je $a = \log 2$ in $b = \log 4$. Najprej izračunajmo odvod

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1}{\frac{e^x+1}{e^x-1}} \cdot \left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right)' = \frac{e^x-1}{e^x+1} \cdot \frac{e^x(e^x-1)-(e^x+1)e^x}{(e^x-1)^2} = \\ &= \frac{1}{e^x+1} \cdot \frac{-2e^x}{e^x-1} = \frac{-2e^x}{e^{2x}-1}. \end{aligned}$$

Posebej izračunajmo še

$$\begin{aligned} 1+h'(x)^2 &= 1+\left(\frac{-2e^x}{e^{2x}-1}\right)^2 = 1+\frac{4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2} = \\ &= \frac{e^{4x}-2e^{2x}+1+4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2} = \\ &= \frac{e^{4x}+2e^{2x}+1}{(e^{2x}-1)^2} = \frac{(e^{2x}+1)^2}{(e^{2x}-1)^2}. \end{aligned}$$

Ker je $e^{2x}+1>0$ in $e^{2x}-1>0$, je

$$\sqrt{1+h'(x)^2} = \sqrt{\frac{(e^{2x}+1)^2}{(e^{2x}-1)^2}} = \frac{|e^{2x}+1|}{|e^{2x}-1|} = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}.$$

Torej je

$$l = \int_{\log 2}^{\log 4} \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}\, dx.$$

Posebej izračunajmo še nedoločeni integral:

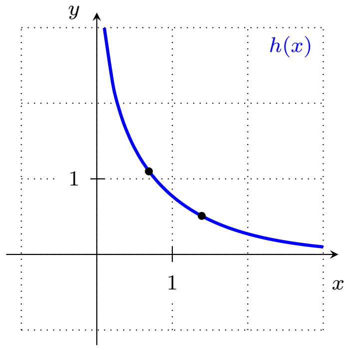
$$\begin{aligned} \int \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}\, dx &= \int \frac{e^{2x}-1+2}{e^{2x}-1}\, dx = \int 1+\frac{2}{e^{2x}-1}\, dx = \\ &= x+\int \frac{2}{e^{2x}-1}\, dx = x+\int \frac{1}{t(t+1)}\, dt = \\ &= x+\int \frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\, dt = \\ &= x+\log|t|-\log|t+1|+c = \\ &= x+\log|e^{2x}-1|-\log|e^{2x}|+c = \\ &= x+\log|e^{2x}-1|-2x+c = \\ &= -x+\log|e^{2x}-1|+c. \end{aligned}$$

Pri tem smo uporabili novo spremenljivko $t = e^{2x}-1$, $dt = 2e^{2x}\, dx$, in razbitje na parcialne ulomke

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{A}{t}+\frac{B}{t+1} = \frac{A(t+1)+Bt}{t(t+1)} = \frac{t(A+B)+A}{t(t+1)} = \frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}.$$

Nazadnje dobimo

$$\begin{aligned} l &= -x+\log|e^{2x}-1| \Big|_{\log 2}^{\log 4} = \\ &= -\log 4+\log 15+\log 2-\log 3 = \\ &= \log\left(\frac{2\cdot 15}{4\cdot 3}\right) = \log\left(\frac{5}{2}\right). \end{aligned}$$



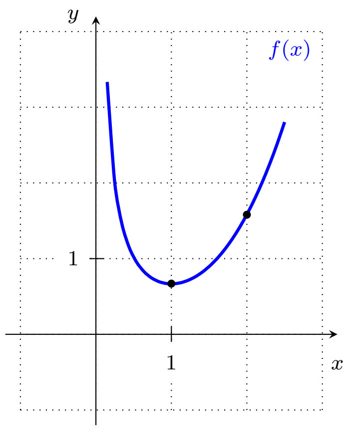
REŠITEV NALOGE 111.

Najprej izračunamo $f'(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2}$ in

$$\begin{aligned}
1 + f'(x)^2 &= 1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2}\right)^2 = 1 + \frac{x^4}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^4} = \\
&= \frac{x^4}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^4} = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2}\right)^2.
\end{aligned}$$

Torej je

$$\begin{aligned}
l &= \int_1^2 \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx = \int_1^2 \sqrt{\left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2}\right)^2}\, dx = \\
&= \int_1^2 \left|\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2}\right| dx = \int_1^2 \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2}\, dx = \\
&= \frac{x^3}{6} - \frac{1}{2x}\Big|_1^2 = \frac{8}{6} - \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right) = \frac{17}{12}.
\end{aligned}$$



REŠITEV NALOGE 112.

a. Vpeljemo novo spremenljivko $t = e^x + 1$, $dt = e^x\, dx$ in uporabimo razcep na parcialne ulomke

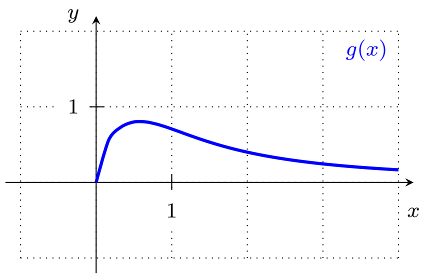
$$\frac{1}{t(t-1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} = \frac{A(t-1) + Bt}{t(t-1)} = \frac{t(A+B) - A}{t(t-1)} = \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t},$$

pa dobimo

$$\begin{aligned}
\int f(x)\,dx &= \int \frac{1}{e^x+1}\,dx = \int \frac{1}{t(t-1)}\,dt = \int \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}\,dt = \\
&= \log|t-1| - \log|t| + c = \log|e^x| - \log|e^x+1| + c = \\
&= x - \log|e^x+1| + c.
\end{aligned}$$

b. Za ta del uporabimo novo spremenljivko $t = 1 + x^2$, $dt = 2x\,dx$ in dobimo

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^\infty \pi g(x)^2\,dx = \pi \int_0^\infty \frac{2x}{(1+x^2)^2}\,dx = \pi \int_1^\infty \frac{1}{t^2}\,dt = \\
&= -\frac{\pi}{t}\Big|_1^\infty = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{\pi}{t}\right) + \frac{\pi}{1} = 0 + \pi = \pi.
\end{aligned}$$

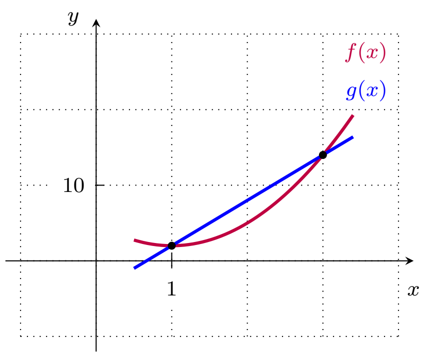


Rešitev naloge 113.

a. Najprej izračunamo presečišča obeh grafov:

$$\begin{aligned}
f(x) &= g(x), \\
3x^2 - 6x + 5 &= 6x - 4, \\
3x^2 - 12x + 9 &= 0, \\
x^2 - 4x + 3 &= 0, \\
(x-1)(x-3) &= 0.
\end{aligned}$$

Presečišči sta torej pri $x = 1$ in $x = 3$.



Ploščina omejenega območja med grafoma je torej enaka

$$\begin{aligned}
S &= \int_1^3 g(x) - f(x)\,dx = \int_1^3 6x - 4 - (3x^2 - 6x + 5)\,dx \\
&= \int_1^3 -3x^2 + 12x - 9\,dx = -x^3 + 6x^2 - 9x\Big|_1^3 = \\
&= -27 + 54 - 27 - (-1 + 6 - 9) = 4.
\end{aligned}$$

b. Iskani volumen je enak

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^3 g(x)^2 - f(x)^2 \, dx = \pi \int_1^3 -9x^4 + 36x^3 - 30x^2 + 12x - 9 \, dx = \\ &= \pi \left(\frac{-9x^5}{5} + 9x^4 - 10x^3 + 6x^2 - 9x \right) \Big|_1^3 = \\ &= \pi \left(\frac{-2187}{5} + 729 - 270 + 54 - 27 \right) - \pi \left(\frac{-9}{5} + 9 - 10 + 6 - 9 \right) = \frac{272}{5}\pi. \end{aligned}$$

Rešitev naloge 114.

Volumen je enak

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_e^\infty \frac{1}{x(\log x)^2} \, dx = \pi \int_1^\infty \frac{1}{t^2} \, dt = -\frac{\pi}{t} \Big|_1^\infty = \\ &= \frac{\pi}{t} \Big|_\infty^1 = \frac{\pi}{1} - \lim_{t\to\infty} \frac{\pi}{t} = \pi - 0 = \pi. \end{aligned}$$

Pri tem smo vpeljali novo spremenljivko $t = \log x$, $dt = \frac{1}{x} \, dx$.

Rešitev naloge 115.

Pot, ki jo kolesar opravi v času $t_1 \leq 3$ po začetku pospeševanja, je ploščina pod grafom hitrosti, torej

$$s(t_1) = \int_0^{t_1} v(t) \, dt = \int_0^{t_1} 7 + \frac{1}{3}t^2 \, dt = 7 \cdot t + \frac{t^3}{9} \Big|_0^{t_1} = 7 \cdot t_1 + \frac{{t_1}^3}{9}.$$

Zanima nas kolesarjeva pot pri $t_1 = 3$. Dobimo

$$s(3) = 7 \cdot 3 + \frac{3^3}{9} = 21 + 3 = 24.$$

Kolesar je v prvih treh sekundah torej prevozil 24 metrov. Njegova hitrost po koncu pospeševanja je bila $v(3) = 7 + \frac{3^2}{3} = 10$ m/s.

Literatura

[1] G. Tomšič, N. Mramor-Kosta, B. Orel *Matematika I*, Fakulteta za elektrotehniko in računalništvo, 2004.
[2] G. Tomšič, N. Mramor-Kosta, B. Orel *Matematika II*, Fakulteta za elektrotehniko in računalništvo, 2004.
[3] P. Oblak, *Matematika*, Založba FE in FRI, 2014, `http://matematika.fri.uni-lj.si/mat/matvsp.pdf`.
[4] P. Oblak, *Matematika*, `http://matematika.fri.uni-lj.si/mat/matvsp2019.pdf`.