Univerza v Ljubljani
Fakulteta za računalništvo in informatiko

MATEMATIKA

Polona Oblak

Ljubljana, 2019

Kazalo

Predgovor

Predmet Matematika je semestrski predmet prvega letnika visokošolskega strokovnega študija na Fakulteti za računalništvo in informatiko Univerze v Ljubljani. Sestavljen je iz dveh bistveno različnih delov, analitičnega in algebraičnega.

V prvih štirih poglavjih knjige predstavimo analitični del predmeta, torej zaporedja in vrste ter funkcije ene spremenljivke, njihove odvode in integrale. V nadaljnjih dveh poglavjih pa študenti spoznajo osnove linearne algebre, torej geometrijo vektorjev v prostoru, matrike in reševanje sistemov linearnih enačb. Študenti prihajajo iz srednjih šol z različnim predznanjem, zato sta poglavji, ki sta bili obravnavani že v večini srednjih šol, podani v dodatkih. V prvem navedemo osnovne oznake, ki jih uporabljamo na množici realnih števil, nekoliko več pa povemo tudi o kompleksnih številih. V drugem dodatku so predstavljene elementarne funkcije in njihove lastnosti.

Snov predmeta je obsežna, predavatelji pa se jo trudimo predstaviti na razumljiv in uporaben način. Zato ima knjiga Matematika velikov primerov, ki ilustrirajo definicije in izreke, težjih dokazov pa v knjigi ne navajamo. V navedeni literaturi lahko zahtevnejši bralci poiščejo dokaze izpuščenih izrekov in najdejo tudi nekatere njihove posplošitve.

Ob tem se najlepše zahvaljujem recenzentoma, prof. dr. Gregorju Dolinarju in prof. dr. Neži Mramor Kosta, za skrben pregled knjige in prijazne nasvete med njenim nastajanjem.

Polona Oblak

POGLAVJE 1

Zaporedja in vrste

1.1. Zaporedja

Pod besedo zaporedje si velikokrat predstavljamo urejen seznam. To je lahko zaporedje opravil v nekem dnevu, zaporedje ocen tekom študija ali pa zaporedje spletnih strani, ki smo jih danes obiskali. V matematiki se ukvarjamo z zaporedji števil, saj lahko takšna zaporedja dobro preučujemo, po drugi strani pa zaporedja pogosto uporabljamo pri programiranju.

1.1.1. Definicija številskih zaporedij. Primer neskončnega zaporedja naravnih števil je zaporedje decimalk števila π:

$$3,\quad 1,\quad 4,\quad 1,\quad 5,\quad 9,\quad 2,\quad \dots$$

0. člen   2. člen   4. člen   6. člen

1. člen   3. člen   5. člen   tu sledi neskončno členov

Takšno zaporedje bomo označili kot $a_0 = 3$, $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 1$, $a_4 = 5$, $a_5 = 9$, $a_6 = 2$,...

Formalno zaporedje podamo kot preslikavo, ki vsakemu indeksu priredi pripadajoči člen zaporedja. Pri tem se bodo nekatera zaporedja začela z ničtim členom, druga s prvim členom, tretja pa morda z dvainštiridesetim členom, če bo tako bolj prikladno.

> *Zaporedje* realnih števil je preslikava, ki naravnemu številu n priredi realno število a_n:
> $$\begin{aligned} \mathbb{N}_0 &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto a_n. \end{aligned}$$
> Pri tem število a_n imenujemo *n-ti člen zaporedja*, zaporedje $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ pa označimo z
> $$(a_n)_n.$$

Če se pri tem zaporedje ne bo začelo z ničtim členom (ampak s prvim ali dvainštiridesetim), bomo to posebej poudarili.

Zaporedja lahko opišemo na veliko različnih načinov.

Kot v primeru decimalk v decimalnem zapisu števila π lahko podamo zaporedje opisno. Za računanje je najpriročnejši način, da podamo člene zaporedja *eksplicitno*, kjer je podano pravilo, kako vsak člen zaporedja izračunamo iz njegovega indeksa:

$$a_n = f(n).$$

Na primer, prvih pet členov zaporedja $a_n = \frac{1}{n}$, kjer je $n \geq 1$, je enakih $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$, $a_4 = \frac{1}{4}$, $a_5 = \frac{1}{5}$.

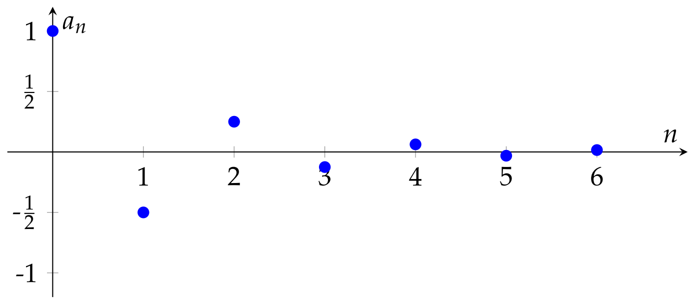
Če je zaporedje podano eksplicitno, lahko člene a_n grafično ponazorimo kot točke (n, a_n) v ravnini $\mathbb{R}^2$, ki ležijo na grafu funkcije f.

PRIMER 1.1.1. *Ugani, kaj bi lahko bil splošni člen zaporedja* $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, \ldots$.

REŠITEV: *Če označimo člene zaporedja kot* $a_0 = 1$, $a_1 = -\frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{4}$, $a_3 = -\frac{1}{8}, \ldots$, *opazimo, da imajo členi zaporedja* a_n *v imenovalcu število* 2^n. *Hkrati členi alternirajo: sodi členi so pozitivni, lihi pa negativni. Zato lahko splošni člen zaporedja zapišemo kot*

$$a_n = (-1)^n \frac{1}{2^n}.$$

Grafično lahko člene zaporeja predstavimo v ravnini kot:



Ni vedno lahko podati splošnega člena zaporedja. Včasih je splošni člen zaporedja lažje podati *rekurzivno*, kar pomeni, da izrazimo n-ti člen zaporedja s pomočjo prejšnjih. Če pri tem podamo n-ti člen a_n kot predpis, ki je odvisen od prejšnega člena

$$a_{n+1} = f(a_n), \tag{1}$$

$n \geq 0$, imenujemo takšen predpis *enočlena rekurzija*. Ko enkrat predpišemo začetni člen zaporedja a_0, lahko nato s pomočjo rekurzivnega predpisa (1) izračunamo nadaljnje člene.

PRIMER 1.1.2. *V hranilniku imaš en kovanec. Ponujena ti je naslednja igra: vsak dan ti podvojim število kovancev, če jih imaš manj kot deset, v nasprotnem primeru pa mi moraš ti dati pet kovancev.*

Zapiši rekurzivno formulo za število kovancev b_n, *ki jih imaš dne* n, *in prvih 13 členov zaporedja.*

REŠITEV: *V primeru, da imaš dne* n *v hranilniku* b_n *kovancev in je* $b_n < 10$, *boš imel naslednji dan* $b_{n+1} = 2b_n$ *kovancev. Če pa je* $b_n \geq 10$, *potem bo* $b_{n+1} = b_n - 5$. *Zato lahko zapišemo*

$$b_{n+1} = \begin{cases} 2b_n, & \text{če je } b_n < 10, \\ b_n - 5, & \text{če je } b_n \geq 10, \end{cases}$$

za vse $n \in \mathbb{N}_0$. *Prvih 13 členov zaporedja je enakih:*

$$1, 2, 4, 8, 16, 11, 6, 12, 7, 14, 9, 18, 13.$$

Eksplicitno formulo za splošni člen zaporedja $(b_n)_n$ *bi bilo težko uganiti.*

V splošnem lahko rekurzivno zvezo podamo kot *k-člено rekurzijo*

$$a_{n+k} = f(a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k-1})$$

in predpišemo prvih k členov zaporedja $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$. Pri k-členi rekurziji je vsak člen zaporedja odvisen od prejšnjih k členov. Primer dvočlene rekurzije je Fibonaccijevo zaporedje

$(F_n)_n$, kjer vsak člen zaporedja dobimo kot vsoto prejšnjih dveh. Torej je rekurzivna zveza enaka

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

za $n \geq 0$, kjer je $F_0 = 0$ in $F_1 = 1$. Prvih nekaj členov zaporedja je enakih 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,. . . .

PRIMER 1.1.3. *Število 13 slovi kot nesrečno število. Vsako število, v katerem nastopa 13, imenujmo tudi nesrečno. Takšna so na primer 1309, 42135 ali pa 98013. Vsa ostala števila imenujmo srečna števila.*

Zapiši rekurzivno zvezo za število srečnih števil s_n, ki imajo največ n števk.

REŠITEV: *Vsako število s kvečjemu n števkami lahko zapišemo kot n mestno število, ki ima na vsakem mestu števke $0, 1, \ldots, 9$. Če ima pri tem številu na začetku ničlo, se ta ničla ne šteje v število mest.*

Za prvo števko lahko izberemo poljubno število med 0 in 9, za kar imamo 10 možnosti. Na preostalih $n-1$ mestih moramo napisati srečno število, za kar imamo s_{n-1} možnosti. Takšnih števil je torej

$$10 \cdot s_{n-1}.$$

Pri tem pa smo lahko še vedno napisali nekaj nesrečnih števil, in sicer tiste, ki imajo prvo števko 1 in drugo števko 3, od tretjega mesta dalje pa so srečna. Takšnih števil je

$$s_{n-2}$$

in zato je vseh srečnih števil z največ n števkami enako

$$s_n = 10 s_{n-1} - s_{n-2}.$$

Pri tem je $s_1 = 10$, saj je vseh 10 cifer srečnih, $s_2 = 99$, saj je 13 edino nesrečno število, ki ga lahko zapišemo s kvečjemu dvema števkama. Tako lahko preprosto izračunamo tudi $s_3 = 980$, $s_4 = 9701$, $s_5 = 96030$,. . . .

1.1.2. Lastnosti zaporedij. Definirajmo sedaj nekaj pojmov, ki nam bodo opisovali lastnosti zaporedij.

> Zaporedje $(a_n)_n$ je *navzgor omejeno*, če obstaja tako število $M \in \mathbb{R}$, da je $a_n \leq M$ za vsak indeks n. Vsak tak M imenujemo *zgornja meja* zaporedja $(a_n)_n$. Če zaporedje ni navgor omejeno, je *navzgor neomejeno*.
> Zaporedje $(a_n)_n$ je *navzdol omejeno*, če obstaja tako število $m \in \mathbb{R}$, da je $a_n \geq m$ za vsak indeks n. Vsak tak m imenujemo *spodnja meja* zaporedja $(a_n)_n$. Če zaporedje ni navzdol omejeno, je *navzdol neomejeno*.
> Pravimo, da je zaporedje *omejeno*, če je navzdol in navzgor omejeno.

Zaporedje $a_n = (-1)^n \frac{1}{2^n}$ iz primera 1.1.1 je navzgor omejeno, saj je $a_n \leq 1$ za vse $n \in \mathbb{N}_0$, in navzdol omejeno, saj je $a_n \geq -1$ za vse $n \in \mathbb{N}_0$. Torej je 1 zgornja meja zaporedja. Ni pa 1 edina zgornja meja, saj velja na primer tudi $a_n \leq 2$ in $a_n \leq 100$. Zato sta tudi 2 in 100 zgornji meji. Pravzaprav za poljubno zaporedje velja, da če je M njegova zgornja meja, je tudi vsako število večje od M njegova zgornja meja.

> Zaporedje je *naraščajoče*, če je $a_{n+1} \geq a_n$ za vsak n, in je *padajoče*, če je $a_{n+1} \leq a_n$ za vsak n.

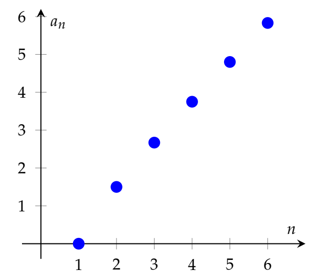
Zaporedje $a_n = (-1)^n \frac{1}{2^n}$ iz primera 1.1.1 ni niti naraščajoče niti padajoče.

PRIMER 1.1.4. *Ugotovi, ali je zaporedje*

$$b_n = \frac{n^2 - 1}{n},$$

kjer je $n \geq 1$, *naraščajoče, padajoče, navzgor omejeno ali navzdol omejeno.*

REŠITEV: *Prvih nekaj približkov členov zaporedja je enakih* 0, 1.5, 2.67, 3.75, 4.8, 5.83, *splošni člen zaporedja pa lahko zapišemo tudi kot* $b_n = \frac{n^2-1}{n} = n - \frac{1}{n}$. *Kaže, da je zaporedje* b_n *naraščajoče in navzgor neomejeno. Vendar občutek ni dovolj, prepričati se moramo, da je to res.*



Ker je $\frac{1}{n} \leq 1$, *sledi* $b_n = n - \frac{1}{n} \geq n - 1$. *Kar pomeni, da je* n*-ti člen zaporedja vsaj* $n - 1$ *in zato so členi poljubno veliki. Torej je zaporedje navzgor neomejeno. Ker je* $\frac{1}{n} \leq n$, *je* $b_n \geq 0$ *za vsak* n *in zato je zaporedje navzdol omejeno.*

Če želimo pokazati, da je zaporedje naraščajoče, moramo pokazati, da je $b_{n+1} \geq b_n$. *Ker velja*

$$b_{n+1} - b_n = n + 1 - \frac{1}{n+1} - n + \frac{1}{n} = 1 + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) > 1 > 0,$$

je zaporedje res naraščajoče.

PRIMER 1.1.5. *Ugotovi, ali je zaporedje, podano z rekurzivno zvezo*

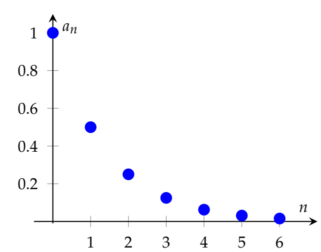
$$c_{n+1} = \frac{c_n}{2}$$

in začetnim členom $c_0 = 1$, *naraščajoče, padajoče, navzgor omejeno ali navzdol omejeno.*

REŠITEV: *Iz rekurzivne zveze* $c_{n+1} = \frac{c_n}{2}$ *in začetnega člena zaporedja* $(c_n)_n$ *hitro razberemo prve člene zaporedja:* $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots$ *Ker so vsi členi pozitivni, je zaporedje navzdol omejeno. Da bi pokazali, da je zaporedje padajoče, moramo preveriti, da je* $c_{n+1} \leq c_n$. *Ker je*

$$c_{n+1} - c_n = \frac{c_n}{2} - c_n = -\frac{c_n}{2} < 0,$$

sledi $c_{n+1} < c_n$ *in zato je zaporedje res padajoče. Sledi, da je tudi navzgor omejeno z začetnim členom* $c_0 = 1$.



Zaporedje $(a_n)_n$, kjer vsak naslednji člen dobimo tako, da predhodnega pomnožimo s fiksnim številom q, imenujemo *geometrijsko zaporedje* s kvocientom q. Rekurzivno ga podamo kot

$$a_{n+1} = qa_n,$$

kjer je $n \geq 0$ in je začetni člen $a_0 = a$, eksplicitno pa s predpisom

$$a_n = q^n a$$

za vse $n \geq 0$. Kako se geometrijsko zaporedje obnaša pri zelo velikih indeksih n, bomo raziskali v primerih 1.1.9 in 1.1.10.

Poglejmo še enkrat zaporedje v primeru 1.1.5. Pri večjih indeksih so členi zaporedja vse bliže številu 0. Rekli bomo, da je *limita zaporedja* $(c_n)_n$ *enaka* 0.

1.1.3. Limita zaporedja. Če bodo od nekega člena a_n dalje **vsi** členi zaporedja $(a_n)_n$ dovolj blizu števila a, bomo rekli, da je a limita zaporedja $(a_n)_n$. Ali bolj formalno, za vsak interval $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, kjer je ε majhno pozitivno število, obstaja tak indeks N, da se vsi členi a_N, a_{N+1}, a_{N+2},... od števila a razlikujejo za manj kot ε.

Število a je *limita* zaporedja $(a_n)_n$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak indeks $N \in \mathbb{N}_0$, da za vsak $n \geq N$ velja $|a - a_n| < \varepsilon$.
Označimo:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

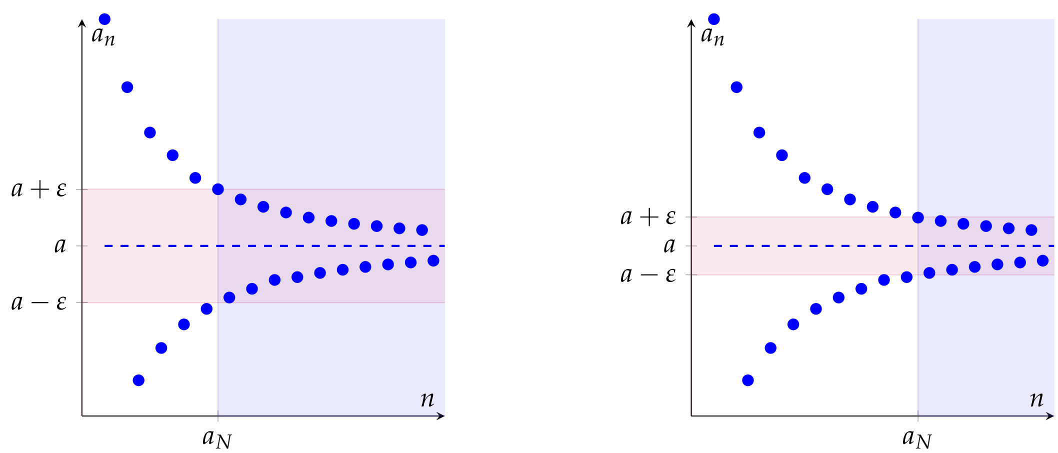
Pravimo, da je zaporedje *konvergentno*, če ima limito, in da konvergira k limiti. Če nima limite, pravimo, da je *divergentno*.

Če je pri tem zaporedje navzgor neomejeno, potem pišemo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Pravimo tudi, da zaporedje narašča preko vseh meja. To pomeni, da za vsako realno število M obstaja tak indeks N, da je $a_n \geq M$ za vse $n \geq N$.

V definiciji limite je število N odvisno od izbranega števila ε. Z manjšanjem števila ε se indeks N veča.



Če bi bila ε natančnost, s katero računamo, potem bi bili od N-tega člena dalje vsi členi zaporedja enaki a. Na primer, če računamo na 30 decimalnih mest natančno, upoštevamo samo prvih 30 decimalk vsakega člena. Če je N tak, da se od N-tega člena dalje vsi členi na prvih 30 decimalnih mestih ujemajo, bodo pri naši natančnosti od tu dalje vsi videti enaki.

PRIMER 1.1.6. *Pokaži, da je zaporedje s splošnim členom* $a_n = \frac{1}{n^2}$ *konvergentno. Od katerega člena dalje so vsi členi zaporedja za manj kot* 0.01 *oddaljeni od limite?*

REŠITEV: *Prvih nekaj členov zaporedja je enakih* $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \ldots$ *Da bi dokazali, da je limita zaporedja enaka 0, moramo pokazati, da za vsak* $\varepsilon > 0$ *obstaja tak N, da je* $|a_n - 0| < \varepsilon$ *za vse* $n \geq N$, *oziroma ekvivalentno, da je* $\left|\frac{1}{n^2}\right| < \varepsilon$. *Ker je* $\frac{1}{n^2}$ *vedno pozitivno število, je* $\left|\frac{1}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$. *Torej moramo* *pokazati, da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak N, da je $n^2 > \frac{1}{\varepsilon}$ za vse $n \geq N$, oziroma ekvivalentno, da je $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.*

Za poljuben ε izberimo $N = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Potem za vsak $n \geq N$ velja

$$|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{N^2} = \varepsilon,$$

iz česar sledi, da je 0 limita zaporedja $a_n = \frac{1}{n^2}$.

Sedaj, ko smo pokazali, da je 0 limita zaporedja, vemo, da so vsi členi zaporedja od nekega dalje poljubno blizu številu 0. Sprašujemo se, od katerega člena dalje so vsi členi zaporedja za manj kot 0.01 oddaljeni od limite, torej, za katere n velja

$$\frac{1}{n^2} < 0.01.$$

Če množimo neenkost z n^2, dobimo $0.01n^2 > 1$, oziroma $n^2 > 100$. Sledi $n > 10$, torej so vsi členi od vključno enajstega za manj kot 0.01 oddaljeni od limite.

Velja tudi splošneje: ne le, da je $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, temveč velja, da je

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0} \qquad \boxed{1}$$

za vse $k > 0$.

1.1.4. Pravila za računanje z limitami. Pogosto želimo izračunati limito zaporedja, ki je vsota, razlika, produkt ali kakšna druga funkcija znanih zaporedij.

Torej, na primer, da poznamo zaporedji $(a_n)_n$ in $(b_n)_n$, kjer zaporedje $(a_n)_n$ konvergira k a, zaporedje $(b_n)_n$ pa k b. Od nekega člena dalje so vsi členi zaporedja $(a_n)_n$ dovolj blizu številu a in vsi členi zaporedja $(b_n)_n$ dovolj blizu b. Sledi, da je potem za dovolj pozne člene zaporedja tudi $a_n + b_n$ dovolj blizu $a + b$.

Formalno to zapišemo tako, da za vsak $\varepsilon > 0$ obstajata taka indeksa N in M, da velja $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ za vse $n \geq N$ in $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ za vse $n \geq M$. Če izberemo večjega od obeh indeksov N in M, velja

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ in } |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

za vse $n \geq \max\{N, M\}$. Iz tega lahko sklepamo, da je

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |a_n - a + b_n - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

S tem smo pokazali, da velja

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n.} \qquad \boxed{2}$$

Z nekoliko več truda bi se prepričali, da velja podobna formula tudi za produkt dveh konvergentnih zaporedij. Če so od nekega člena dalje vsi členi zaporedja $(a_n)_n$ dovolj blizu številu a in vsi členi zaporedja $(b_n)_n$ dovolj blizu b, potem ni težko verjeti, da je za dovolj pozne člene zaporedja tudi $a_n \cdot b_n$ dovolj blizu $a \cdot b$. Zatorej velja:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n.}$$

Ker je deljenje le množenje z obratnim številom, lahko sklepamo tudi, da velja

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n},} \qquad \boxed{3}$$

če je le $b_n \neq 0$ za vsak n in $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$.

V posebnem primeru za vsako realno število α velja tudi

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} (\alpha a_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} a_n} \qquad \boxed{4}$$

in

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} (a_n)^\alpha = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^\alpha,}$$

če so vsi členi zaporedja $(a_n)_n$ pozitivni in je $\alpha \neq 0$.

PRIMER 1.1.7. *Izračunaj* $\lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)^2}{2n^3+n^2+1}$.

REŠITEV: *V omenjeni limiti*

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)^2}{2n^3+n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-2n+1}{2n^3+n^2+1}$$

tako števec kot imenovalec naraščata preko vseh mej, zato poskusimo z naslednjim trikom: števec in imenovalec delimo z najvišjo potenco n^α*, ki nastopa v obeh polinomih. V našem primeru je to* n^3*, zato delimo vsakega posebej z* n^3 *in dobimo*

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} - 2\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}}.$$

Če upoštevamo najprej pravilo $\boxed{3}$ *in nato še* $\boxed{2}$ *in* $\boxed{4}$*, dobimo*

$$L = \frac{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} - 2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}}{2 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}},$$

kar je po $\boxed{1}$ *enako*

$$L = \frac{0 - 2\cdot 0 + 0}{2+0+0} = 0.$$

Velja tudi naslednje pravilo, ki pa ga ne bomo dokazovali. Če je $a_n > 0$ za vsak (dovolj velik) n, potem velja

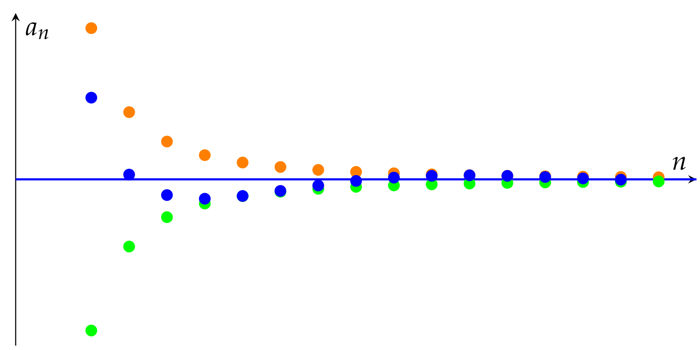
$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \lim_{n\to\infty} a_n^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}, \tag{5}$$

če le obstajata limiti $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ in $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Naslednji izrek imenujemo tudi *Izrek o sendviču*, saj pove naslednje: če imamo zaporedji $(a_n)_n$ in $(c_n)_n$, ki konvergirata k isti limiti, potem vsako zaporedje, ki je ujeto med njiju, tudi konvergira k isti limiti.

Če za vsako naravno število n velja $a_n \leq b_n \leq c_n$ in je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$, je tudi

$$\lim_{n\to\infty} b_n = a. \tag{6}$$



V to se prepričamo s preprosto oceno. Ker je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$, za vsak $\varepsilon > 0$ obstajata taka N in M, da je $|a_n - a| < \varepsilon$ za vse $n \geq N$ ter $|c_n - a| < \varepsilon$ za vse $n \geq M$. Torej je

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \quad \text{ter} \quad a - \varepsilon < c_n < a + \varepsilon$$

za vse $n \geq \max\{N, M\}$. Ker je $a_n \leq b_n \leq c_n$, sledi

$$a - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < a + \varepsilon,$$

oziroma

$$|b_n - a| < \varepsilon$$

za vse $n \geq \max\{N, M\}$. Torej je tudi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

PRIMER 1.1.8. *Izračunaj* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n^2}$.

REŠITEV: *Ker je* $\cos n \in [-1, 1]$ *za vse* $n \in \mathbb{N}_0$, *je* $-\frac{1}{n^2} \leq \frac{\cos n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$. *Po* $\boxed{1}$ *in* $\boxed{4}$ *sedaj velja* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{n^2}\right) = 0$ *in zato po Izreku o sendviču* $\boxed{6}$ *tudi*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n^2} = 0.$$

1.1.5. Lastnosti konvergentnih zaporedij. Če je zaporedje $(a_n)_n$ konvergentno z limito a, potem so od nekje dalje vsi členi zaporedja dovolj blizu limite a. To pomeni, da so členi a_0, a_1, $\ldots$, a_{N-1} poljubni, medtem ko je preostalih neskončno členov a_N, a_{N+1},… ujetih v dovolj ozek interval okoli limite a. Zatorej je zaporedje $(a_n)_n$ navzgor omejeno, z zgornjo mejo pasu okoli limite a, v katerem se nahajo vsi členi od a_N-tega dalje, ali pa z največjim izmed členov a_0, a_1, $\ldots$, a_{N-1}. Prav tako sklepamo, da je zaporedje $(a_n)_n$ navzdol omejeno.

Kaj pa obratno? Ali je vsako omejeno zaporedje konvergentno? Ne. Na primer, zaporedje $1, -1, 1, -1,\ldots$ je omejeno med -1 in 1, pa vendar ni konvergentno. Izkaže pa se, da velja naslednja trditev:

> Naraščajoče zaporedje je konvergentno natanko tedaj, kadar je navzgor omejeno. 7

Lahko je verjeti, da $\boxed{7}$ velja. Namreč, če je zaporedje naraščajoče, je vsak njegov naslednji člen večji od prejšnjega. Če dodatno predpostavimo, da je tudi navzgor omejeno, vemo, da členi zaporedja ne smejo preseči zgornje meje, zato se približujejo (ali dosežejo) najmanjšo izmed svojih zgornjih mej, ki je tudi limita zaporedja.

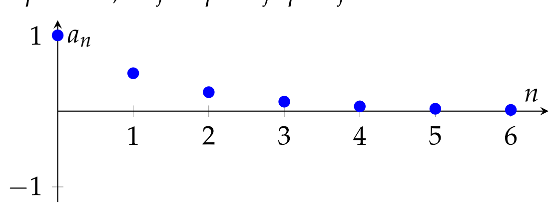
Podobno velja tudi naslednja trditev.

> Padajoče zaporedje je konvergentno natanko tedaj, kadar je navzdol omejeno.

PRIMER 1.1.9. *Naj bo $q \in (-1, 1]$ poljubno število. Pokaži, da je geometrijsko zaporedje $a_n = q^n$ konvergentno in določi njegovo limito.*

REŠITEV: *Ločimo štiri primere*

(1) *Naj bo $q = 1$. Potem je zaporedje $a_n = 1^n = 1$ konstantno in zato konvergentno z limito 1.*
(2) *Naj bo $q = 0$. V tem primeru je zaporedje dobro definirano le za $n \geq 1$. Vsi členi zaporedja so enaki $a_n = 0^n = 0$ za $n \geq 1$. Zato je zaporedje konvergentno z limito 0.*
(3) *Če je $q \in (0, 1)$, je tudi $q^n \in (0, 1)$ za vsa naravna števila $n \geq 1$. Zato je zaporedje omejeno. Zaporedje $a_n = q^n$ lahko zapišemo tudi z rekurzivno formulo $a_{n+1} = qa_n$ za vse $n \geq 1$. Iz tega sledi*
$$a_{n+1} = qa_n < a_n,$$
saj je $q < 1$. Torej smo pokazali, da je zaporedje padajoče.



Ker je vsako padajoče omejeno zaporedje konvergentno, je tudi zaporedje $(a_n)_n$ konvergentno. Označimo njegovo limito z a. Ker je
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a,$$
sledi
$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} qa_n = q \lim_{n\to\infty} a_n = qa.$$

Iz dobljene zveze $a = qa$ sledi $a(1-q) = 0$. Ker $q \neq 1$, delimo enakost z $1-q$, iz česar sledi $a = 0$. S tem smo pokazali, da je

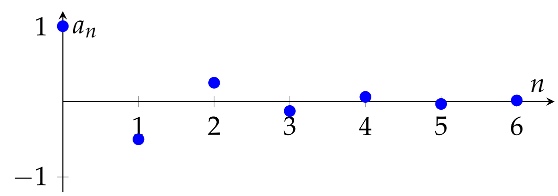
$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0$$

za vse $q \in (0,1)$.

(4) *Če je $q \in (-1,0)$, potem je*

$$-|q|^n \leq q^n \leq |q|^n.$$

Ker je $|q| \in (0,1)$, je zaporedje $|q|^n$ konvergentno z limito 0, kot smo pokazali v točki (3). Po drugi strani je $-|q|^n$ po $\boxed{4}$ tudi konvergentno z limito 0. Zato je po Izreku o sendviču $\boxed{6}$ tudi zaporedje s splošnim členom q^n, kjer je $q \in (-1,0)$, konvergentno z limito 0.



PRIMER 1.1.10. *Naj bo $q > 1$ ali $q \leq -1$. Pokaži, da zaporedje $a_n = q^n$ ni konvergentno.*

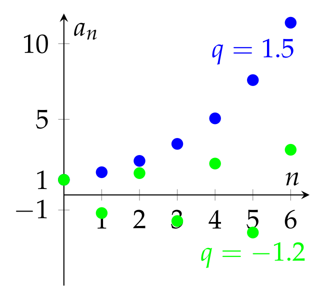
REŠITEV: *Če je $q > 1$ ali $q \leq -1$, sledi, da je $|q|^n \geq 1$ za vsa naravna števila n.*

Denimo, da bi bilo zaporedje $a_n = q^n$ konvergentno z limito a. Kot smo videli že v prejšnjem primeru, iz

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} qa_n = q \lim_{n\to\infty} a_n = qa$$

sledi $a = 0$, saj $q \neq 1$. Ker pa so vsi členi zaporedja $|q|^n \geq 1$, ni mogoče, da bi bila limita zaporedja enaka 0.

Zatorej zaporedje $a_n = q^n$ ni konvergentno, če je $q > 1$ ali $q \leq -1$.



PRIMER 1.1.11. *Izračunaj $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2^n+6^n}{3^n+6^{n+1}+1}\right)^3$.*

REŠITEV: *Najprej bomo ugotovili, kam konvergira osnova $\frac{2^n+6^n}{3^n+6^{n+1}+1}$. Kot v primeru 1.1.7 delimo števec in imenovalec s potenco, ki najhitreje narašča, torej s 6^n. Nato po pravilih $\boxed{3}$ in $\boxed{2}$ dobimo, da je*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+6^n}{3^n+6^{n+1}+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{3^n}+1}{\frac{1}{2^n}+6+\frac{1}{6^n}} = \frac{1}{6}.$$

Pri tem smo upoštevali, da je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, kot smo to pokazali v primeru 1.1.9. Podobno je tudi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{6^n} = 0$.

Sedaj iz $\boxed{5}$ sledi, da je

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^n+6^n}{3^n+6^{n+1}+1}\right)^3 = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+6^n}{3^n+6^{n+1}+1}\right)^3 = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}.$$

Dokaz konvergence naslednjega zaporedja je bolj tehničen kot prejšnji dokazi. A z njim bomo pokazali konvergencno zelo pomembnega zaporedja.

PRIMER 1.1.12. *Pokaži, da je zaporedje* $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *konvergentno.*

REŠITEV: *Spomnimo se formule za n-to potenco dvočlenika in zapišimo splošni člen zaporedja kot*

$$\begin{aligned} b_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+2)\cdot(n-k+1)}{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n\cdot n} = \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+2}{n} \cdot \frac{n-k+1}{n}. \end{aligned} \tag{2}$$

Pokazali bomo, da so vsi členi zaporedja manjši od 3. Najprej opazimo, da je vsak od k faktorjev $\frac{n-k+i}{n}$ *manjši ali enak* 1 *za* $i = 1, 2, \ldots, k$. *Ker za vsak* $k \geq 1$ *velja*

$$k! = 1\cdot 2\cdots k \geq 1\cdot 2\cdots 2 = 2^{k-1},$$

lahko člene v vsoti (2) *na desni omejimo z*

$$b_n \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Spomnimo se, da je vsota prvih n členov geometrijskega zaporedja enaka $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$ *in zato velja*

$$b_n \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 1 + 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 3$$

za $n \geq 1$. *Sedaj pokažimo še, da je zaporedje naraščajoče. V ta namen vsakega od k faktorjev v vsoti* (2) *ocenimo navzgor*

$$\frac{n-k+i}{n} = 1 - \frac{k-i}{n} < 1 - \frac{k-i}{n+1}.$$

S tem dobimo neenakost

$$\begin{aligned} b_n &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+2}{n} \cdot \frac{n-k+1}{n} = \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \left(1-\frac{0}{n}\right) \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1-\frac{k-2}{n}\right) \cdot \left(1-\frac{k-1}{n}\right) \leq \\ &\leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \left(1-\frac{0}{n+1}\right) \cdot \left(1-\frac{1}{n+1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1-\frac{k-2}{n+1}\right) \cdot \left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) \leq \\ &\leq 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} \left(1-\frac{0}{n+1}\right) \cdot \left(1-\frac{1}{n+1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1-\frac{k-2}{n+1}\right) \cdot \left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) = \\ &= b_{n+1}. \end{aligned}$$

Sledi, da je $(b_n)_n$ naraščajoče navzgor omejeno zaporedje in zato iz 7 sledi, da je zaporedje $(b_n)_n$ konvergentno.

Limita zaporedja s splošnim členom $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ je ena najpomembnejših matematičnih konstant, ki jo označujemo s simbolom e in imenujemo Eulerjevo število.

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Število e je iracionalno število, torej ga ne moremo zapisati v obliki končnega ali periodičnega decimalnega zapisa. Njegova približna vrednost je enaka 2.718281828459. To število je osnova naravnega logaritma in ga uporabljamo v raznih vejah matematike in v drugih znanostih.

1.2. Vrste

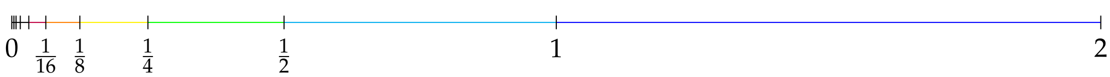
V tem razdelku bomo povedali nekaj malega o tem, kako seštevamo člene neskončnih zaporedij. To je včasih nemogoče, saj na primer ne moremo sešteti neskočno števil oblike

$$0+1+2+3+4+\ldots+n+\ldots$$

S seštevanjem členov se vrednost te vsote namreč veča preko vseh mej. Po drugi strani pa lahko povemo, kaj bi bila vrednost, če seštejemo neskončno števil oblike

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots.$$

Narišimo interval dolžine 2 in na njem označimo števila $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$.



Tako dobimo za krajišča podintervalov točke $\frac{1}{2^n}$, kjer je $n=0,1,2,\ldots$, dolžine intervalov od desne proti levi pa so $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$. Ker je skupna dolžina intervalov enaka 2, velja enakost

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=2.$$

To bomo krajše zapisali kot

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=2.$$

Pri tem simbol $\sum$ pomeni, da seštevamo člene zaporedja, ki ga opisujemo s splošnim členom $\frac{1}{2^n}$. Oznaka pod vsoto pove, da indeks n teče od vključno $n=0$ dalje. Torej je prvi člen v vsoti $\frac{1}{2^0}=1$. Nad vsoto je napisan indeks zadnjega člen zaporedja. Ker je v našem primeru tam simbol ∞, pomeni, da seštejemo neskončno členov $\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots$.

1.2.1. Definicija in konvergenca vrst. Vrsto s členi v zaporedju $(a_n)_n$ definiramo takole:

Vrsta je izraz oblike
$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Pri tem bomo pogosto potrebovali vsoto njenih končno mnogo členov.

Končno vsoto $S_m = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_m = \sum_{n=0}^{m} a_n$ imenujemo *m-ta delna vsota* vrste $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Zaporedje $(S_m)_m$ je zatorej sestavljeno iz delnih vsot $\sum_{n=0}^{m} a_n$ vrste $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Rekurzivno lahko zaporedje delnih vsot zapišemo tudi kot
$$\begin{aligned} S_0 &= a_0, \\ S_{m+1} &= S_m + a_{m+1}, \end{aligned}$$
kjer je m poljubno naravno število.

PRIMER 1.2.1. *Izračunaj m-to delno vsoto vrst* $\sum_{n=0}^{\infty} n$ *ter* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

REŠITEV: *m-ta delna vsota vrste* $\sum_{n=0}^{\infty} n$ *je enaka*
$$S_m = 0 + 1 + 2 + \cdots + m = \frac{m(m+1)}{2},$$
m-ta delna vsota vrste $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ *pa*
$$\begin{aligned} S'_m &= \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^m} = \\ &= \frac{1 - \frac{1}{2^{m+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^m}. \end{aligned}$$

Čas je, da ločimo vrste, ki jih lahko seštejemo, od vrst, ki jih ne moremo sešteti.

Vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je *konvergentna*, če je konvergentno zaporedje delnih vsot $(S_m)_m$. *Vsota* konvergentne vrste je limita
$$S = \lim_{m\to\infty} S_m.$$
Vrsta, ki ni konvergentna, je *divergentna*.

PRIMER 1.2.2. *Pokaži, da vrsta $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n$ ni konvergenta. Pokaži, da je vrsta $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ konvergentna in določi njeno vsoto.*

REŠITEV: *V primeru 1.2.1 smo izračunali m-ti delni vsoti S_m in S'_m vrst $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n$ in $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$. Zaporedje $(S_m)_m$ s splošnim členom $S_m = \frac{m(m+1)}{2}$ narašča preko vseh mej, zato ni konvergentno. Sledi, da tudi vrsta $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n$ ni konvergentna. Ker velja*

$$\lim_{m\to\infty} S'_m = \lim_{m\to\infty} \left(2 - \frac{1}{2^m}\right) = 2,$$

je zaporedje delnih vsot $(S'_m)_m$ konvergentno. Iz česar po definiciji sledi, da je tudi vrsta $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ konvergentna, njena vsota pa je enaka

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{m\to\infty} S'_m = 2,$$

kot smo že sklepali iz skice na strani 15.

Da vrsta $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n$ ni konvergentna, bi lahko razmislili tudi drugače. Členi vrste $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n$ namreč naraščajo preko vseh mej, zato vsak naslednji člen prispeva čedalje več h končni vsoti. Torej vrsta $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n$ ne more imeti končne vsote.

Velja še več. Če členi vrste ne konvergirajo k 0, ampak so vsi večji od $M > 0$, potem vsak naslednji člen prispeva vsaj M k vsoti vrste. Torej tudi v tem primeru vrsta divergira. Zapomnimo si to zelo pomembno lastnost vrst:

> Če je vrsta $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergentna, je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Pogoj, da členi vrste konvergirajo k 0, pa ni zadosten, da bi tudi vrsta konvergirala. Oglejmo si *harmonično vrsto*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Njeni členi tvorijo padajoče zaporedje z limito $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Pokažimo, da vrsta kljub temu ni konvergentna. Neskončno vrsto razbijmo na skupine po 1, 2, 4, 8, 16,... členov:

$$1 + \underbrace{\tfrac{1}{2}} + \underbrace{\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}} + \underbrace{\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}} + \underbrace{\tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{10} + \ldots + \tfrac{1}{16}} + \underbrace{\tfrac{1}{17} + \tfrac{1}{18} + \ldots + \tfrac{1}{32}} + \underbrace{\tfrac{1}{33}} + \ldots$$

$$= 1 + \underbrace{\tfrac{1}{2^0+1}} + \underbrace{\tfrac{1}{2^1+1} + \tfrac{1}{2^1+2}} + \underbrace{\tfrac{1}{2^2+1} + \ldots + \tfrac{1}{2^2+4}} + \underbrace{\tfrac{1}{2^3+1} + \ldots + \tfrac{1}{2^3+8}} + \underbrace{\tfrac{1}{2^4+1} + \ldots + \tfrac{1}{2^4+16}} + \underbrace{\tfrac{1}{2^5+1}} + \ldots$$

Vsaka od podčrtanih skupin je vsota oblike

$$\frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \ldots + \frac{1}{2^n+2^n},$$

v kateri je 2^n sumandov, od katerih je najmanjši zadnji $\frac{1}{2^n+2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}$. Zato je

$$\frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \ldots + \frac{1}{2^n+2^n} > 2^n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}.$$

S tem smo pokazali, da v neskončni vsoti

$$= 1 + \underbrace{\tfrac{1}{2^0+1}}_{} + \underbrace{\tfrac{1}{2^1+1} + \tfrac{1}{2^1+2}}_{> \frac{1}{2}} + \underbrace{\tfrac{1}{2^2+1} + \ldots + \tfrac{1}{2^2+4}}_{> \frac{1}{2}} + \underbrace{\tfrac{1}{2^3+1} + \ldots + \tfrac{1}{2^3+8}}_{> \frac{1}{2}} + \underbrace{\tfrac{1}{2^4+1} + \ldots + \tfrac{1}{2^4+16}}_{> \frac{1}{2}} + \underbrace{\tfrac{1}{2^5+1}}_{} + \ldots$$

nastopa neskončno skupin členov, vsota vsake od njih pa je vsaj $\frac{1}{2}$. Zato je tudi vsota $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ neskončna.

1.2.2. Geometrijska vrsta. Vrsti, katere členi so členi geometrijskega zaporedja, pravimo *geometrijska vrsta*.

Geometrijska vrsta s kvocientom q je vrsta

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots .$$

Najprej za poljubno naravno število m izračunajmo njeno m-to delno vsoto. Ta je enaka

$$S_m = 1 + q + q^2 + \cdots + q^m = \frac{1 - q^{m+1}}{1 - q},$$

če je $q \neq 1$. V primeru, ko je $q = 1$, pa je $S_m = m + 1$. Spomnimo se (primera 1.1.9 in 1.1.10), da velja

$$\lim_{m \to \infty} q^{m+1} = \begin{cases} 0, & \text{če je } |q| < 1, \\ 1, & \text{če je } q = 1. \end{cases}$$

V primeru, ko je $q > 1$ ali pa $q \leq -1$, pa zaporedje $(q_m)_m$ ne konvergira. Zatorej je konvergenca geometrijske vrste odvisna od *kvocienta* q:

(1) če je $|q| < 1$, potem je

$$\lim_{m \to \infty} S_m = \lim_{m \to \infty} \frac{1 - q^{m+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}$$

in zato vrsta $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ konvergira, njena vsota pa je enaka $\frac{1}{1-q}$.

(2) če je $q = 1$, potem je $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \lim\limits_{m \to \infty} S_m = \lim\limits_{m \to \infty} (m+1) = \infty$, iz česar sledi, da vrsta $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ ne konvergira.

(3) če je $|q| > 1$ ali $q = -1$, vrsta $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ prav tako ne konvergira, saj ne konvergira zaporedje delnih vsot.

S tem smo pokazali, da velja naslednje:

Geometrijska vrsta $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ je konvergentna natanko tedaj, ko je $|q| < 1$. V tem primeru je njena vsota enaka

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

PRIMER 1.2.3. *Žogico spustimo z višine dveh metrov. Vsakič, ko se odbije od tal, se vrne na tretjino prejšnje dosežene višine. Kolikšno pot (dviganja in padanja) opravi žogica v celotnem času odbijanja?*

REŠITEV: *V prvem spustu bo žogica naredila pot dolžine 2 metrov. Nato se bo dvignila na višino* $2 \cdot \frac{1}{3}$ *in se spustila za isto razdaljo. Naslednjič se bo dvignila na tretjino prejšnje višine, torej na* $2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$ *in tako dalje. Zato bo skupaj opravila pot dolžine*

$$\begin{aligned} & 2 + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \ldots = \\ = \; & 2 + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots \right) = \\ = \; & 2 + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = 4. \end{aligned}$$

POGLAVJE 2

Funkcije

Ko se ozremo okoli sebe, vidimo vse polno odvisnih spremenljivk. Študentove ocene so odvisne od števila ur učenja, obraba gum na avtu je odvisna od števila prevoženih kilometrov, človeška višina odvisna od višine njegovih staršev, in tako dalje... Torej pravimo, da so študentove ocene funkcija učenja, obraba gum funkcija prevoženih kilometrov, človekova višina pa funkcija višine njegovih staršev.

V matematiki nas seveda bolj zanimajo funkcije števil, v tem poglavju bomo spoznali posebno družino funkcij in sicer funkcije realne spremenljivke.

2.1. Osnovni pojmi in lastnosti funkcij

Pod besedo *funkcija* razumemo predpis f, ki izbranemu realnemu številu x priredi število $f(x)$. S tem smo povedali kar nekaj informacij. Najprej si moramo izbrati množico $\mathcal{D}_f$, iz katere bomo izbirali števila x. Nato pa vsakemu številu x iz $\mathcal{D}_f$ priredimo natanko eno vrednost $f(x)$. Simbol $f(x)$ beremo *"f od x"* ali daljše *"vrednost funkcije f pri elementu x"*. Zapomnimo si naslednjo formalno definicijo:

> *Funkcija* je predpis, ki vsakemu elementu x iz *definicijskega območja* $\mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R}$ priredi natanko določeno realno število $f(x)$. Pišemo tudi:
>
> $$\begin{array}{rcl} f\colon \mathcal{D}_f & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Funkcijo si torej lahko predstavljamo kot magično škatlo, v katero vstavljamo razne vrednosti. Če vanjo vstavimo število x, nam bo škatla vrnila natanko eno njej prirejeno število $f(x)$.

> Spremenljivko x imenujemo *neodvisna spremenljivka*, $y = f(x)$ pa *odvisna spremenljivka*. *Zaloga vrednosti* funkcije f je množica
>
> $$\mathcal{Z}_f = f(\mathcal{D}_f) = \{f(x);\ x \in \mathcal{D}_f\}.$$

PRIMER 2.1.1. *Ali je predpis $f(x) = y$, kjer je $y = x^2$, funkcija? Kaj pa, če je $y^2 = x$?*

REŠITEV: *Prvi predpis $y = x^2$ je funkcija, saj vsakemu realnemu številu x pripada le en kvadrat x^2. Tako je na primer $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 4$, $f(-2) = 4$. V definicijskem območju funkcije f so lahko vsa realna števila.*

Drugi predpis ni funkcija, saj predpis ni enoličen. Namreč, število y, za katerega velja $y^2 = x$, ni nujno eno samo. Za pozitivno število x sta takšni realni števili y dve, in sicer $\sqrt{x}$ in $-\sqrt{x}$.

Dogovorimo se še, da če v predpisu funkcije f definicijsko območje ni podano, izberemo največjo množico, na kateri lahko izračunamo vrednost funkcije f.

PRIMER 2.1.2. *Določi definicijsko območje funkcije $f(x) = \sqrt{x-1}$.*

REŠITEV: *Definicijsko območje je največja množica števil x, za katera lahko izračunamo vrednost $\sqrt{x-1}$. To so vsa števila x, za katera je $x - 1 \geq 0$, torej velja $x \geq 1$. Sledi $\mathcal{D}_f = [1, \infty)$.*

Funkcije nazorno podamo s pomočjo grafa.

Graf funkcije $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R}$, je krivulja v ravnini:

$$\{(x, f(x));\ x \in \mathcal{D}_f\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

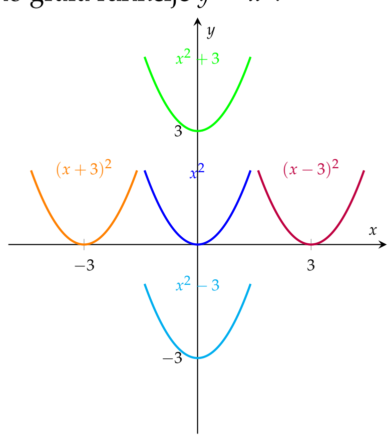
Ker so vrednosti funkcije f enolično podane, graf funkcije seka poljubno navpično premico največ v eni točki. Pri tem je projekcija grafa na os x definicijsko območje $\mathcal{D}_f$, projekcija grafa na os y pa zaloga vrednosti $\mathcal{Z}_f$.

Ko imamo narisan graf funkcije f, ga je preprosto premikati po koordinatnem sistemu. Če vsaki vrednosti $f(x)$ prištejemo število $\alpha > 0$, se graf funkcije pomakne za α navzgor. In podobno, če odštejemo α, se pomakne za α navzdol.

Če bi želeli premakniti graf $y = f(x)$ v levo za število $\alpha \geq 0$, bi moral najprej neodvisni spremenljivki prišteti α in nato na vsoti $x + \alpha$ uporabiti funkcijo f. Namreč, funkcija f ima takšno vrednost v točki a kot ima funkcija $g(x) = f(x + \alpha)$ v točki $a - \alpha$.

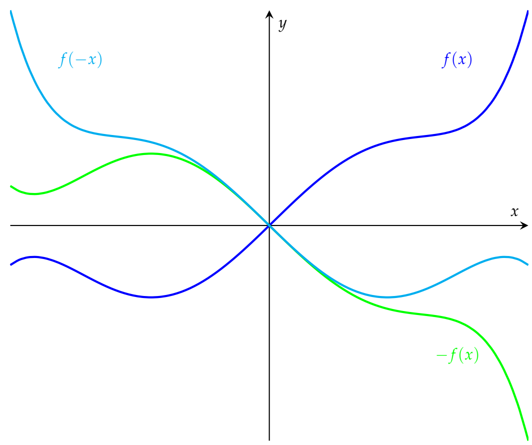
funkcija ($\alpha \geq 0$)	graf
$f(x) + \alpha$	premik grafa $y = f(x)$ za α navzgor
$f(x) - \alpha$	premik grafa $y = f(x)$ za α navzdol
$f(x + \alpha)$	premik grafa $y = f(x)$ za α v levo
$f(x - \alpha)$	premik grafa $y = f(x)$ za α v desno

Na primer, grafi $y = x^2 + 3$, $y = x^2 - 3$, $y = (x + 3)^2$ in $y = (x - 3)^2$ so zgolj premiki za 3 navzgor, navzdol, levo in desno grafa funkcije $y = x^2$.



Iz dane funkcije f lahko dobimo novo funkcijo tako, da vse vrednosti pomnožimo z nekim številom, različnim od 1. Najbolj preprost netrivialen primer, ki je geometrijsko zelo uporaben, je množenje funkcije f s številom -1, pri katerem se vse njene vrednosti množijo z -1. Tako je graf $y = -f(x)$ ravno zrcalna slika grafa $y = f(x)$ preko abscisne osi. Če pa najprej množimo spremenljivko x s številom -1 in nato na $-x$ uporabimo funkcijo f, graf $y = f(-x)$ dobimo iz grafa $y = f(x)$ z zrcaljenjem preko ordinatne osi.

funkcija	graf
$-f(x)$	zrcaljenje grafa $y = f(x)$ čez os x
$f(-x)$	zrcaljenje grafa $y = f(x)$ čez os y



Množenje funkcije z -1 je le poseben primer množenja funkcije s številom.

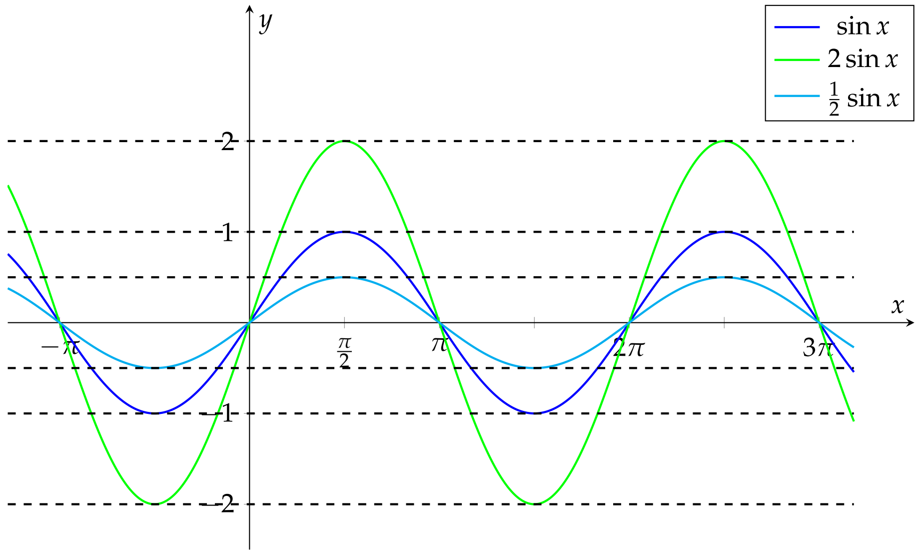
Za poljubno funkcijo $f\colon \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ in poljuben $\alpha \in \mathbb{R}$ definiramo funkcijo $\alpha f\colon \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ kot

$$(\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x).$$

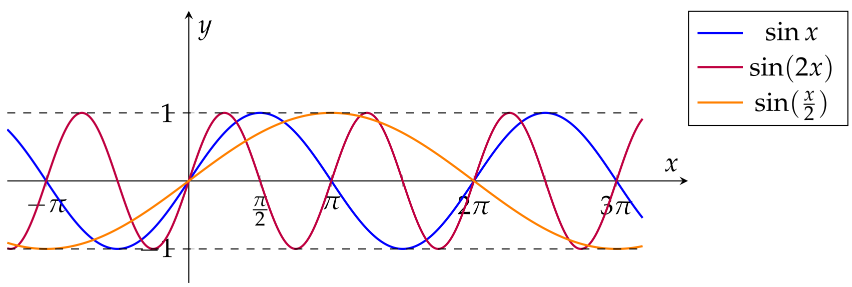
To pomeni, da je vrednost funkcije αf v točki x natanko α-kratnik vrednosti funkcije f v točki x.

PRIMER 2.1.3. *Narišimo grafe funkcij* $y = \sin x$, $y = 2\sin x$, $y = \frac{1}{2}\sin x$, $y = \sin(2x)$ *in* $y = \sin\frac{x}{2}$.

REŠITEV: *Najprej z modro narišimo graf funkcije* $\sin x$, *ki ga že poznamo. Vrednosti funkcije* $2\sin x$ *dobimo tako, da vrednosti* $\sin x$ *množimo z 2. Zato je graf funkcije* $y = 2\sin x$ *za faktor 2 raztegnjen graf funkcije* $y = \sin x$. *Podobno sklepamo, da je graf funkcije* $y = \frac{1}{2}\sin x$ *za faktor* $\frac{1}{2}$ *skrčen graf funkcije* $y = \sin x$.



Po drugi stani pa vrednosti funkcije $\sin(2x)$ *dobimo tako, da najprej neodvisno spremenljivko* x *množimo z* 2 *in nato na* $2x$ *uporabimo funkcijo sinus. To pomeni, da ima funkcija* $\sin(2x)$ *isto vrednost v točki* $\frac{a}{2}$ *kot ima funkcija* $\sin x$ *vrednost v točki* a*. Zato dobimo graf* $y = \sin(2x)$ *iz grafa* $y = \sin x$ *s skrčitvijo za faktor* 2 *vzdolž abscisne osi. Podobno razmislimo, da dobimo graf funkcije* $y = \sin(\frac{x}{2})$ *iz grafa funkcije* $y = \sin x$ *z raztegom za faktor* 2 *vzdolž abscisne osi.*



Na primeru smo videli, da ko najprej množimo spremenljivko s faktorjem α in nato na αx uporabimo funkcijo f, se graf $y = f(x)$ raztegne (če $0 < \alpha < 1$) ali skrči (če $\alpha > 1$) za faktor α vzdolž abscisne osi. Če je α negativen, se graf poleg raztega še prezrcali preko abscisne osi.

funkcija $(c, d \geq 1)$	graf
$cf(x)$	razteg grafa $y = f(x)$ za faktor c vzdolž osi y
$\frac{1}{d}f(x)$	skrčitev grafa $y = f(x)$ za faktor d vzdolž osi y
$f(cx)$	skrčitev grafa $y = f(x)$ za faktor c vzdolž osi x
$f(\frac{x}{d})$	razteg grafa $y = f(x)$ za faktor d vzdolž osi x

Iz danih funkcij pa lahko zgradimo še več novih funkcij. Naj bosta $f\colon \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ in $g\colon \mathcal{D}_g \to \mathbb{R}$ poljubni funkciji. Potem lahko definiramo *vsoto dveh funkcij*

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$

razliko funkcij

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x),$$

produkt funkcij

$$(fg)(x) = (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x),$$

in *kvocient funkcij*

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ kjer je } g(x) \neq 0$$

za vse $x \in D_f \cap \mathcal{D}_g$. Vsako od tako definiranih funkcij dobimo tako, da v vsaki točki $x \in D_f \cap \mathcal{D}_g$ izračunamo vsoto, razliko, produkt ali kvocient funkcijskih vrednosti $f(x)$ in $g(x)$. Zato takšne operacije imenujemo tudi *operacije po točkah*.

Naslednji način, kako iz dveh funkcij pridobimo novo funkcijo, je njuno komponiranje. Če si funkciji f in g predstavljamo kot dve magični škatli, potem *kompozitum* funkcij neodvisno spremenljivko x vstavi v magično škatlo g, nato pa izhodno vrednost $g(x)$ vstavi v magično škatlo f. Izhodna vrednost iz magične škatle f je tako $f(g(x))$ in je vrednost kompozituma funkcij v točki x.

Naj bosta $f\colon \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ in $g\colon \mathcal{D}_g \to \mathbb{R}$ funkciji, za kateri velja $Z_g \subseteq \mathcal{D}_f$. Funkcijo $f \circ g\colon \mathcal{D}_g \to \mathbb{R}$, definirano s predpisom

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)),$$

in imenujemo *kompozitum* funkcij f in g.

Za funkciji f in g lahko spremenimo vrstni red komponiranja in tako dobimo kompozitum $g \circ f$. Pri tem opazimo, da v splošnem kompozituma $f \circ g$ in $g \circ f$ nista enaka.

PRIMER 2.1.4. *V roki držiš dva kupona za popuste v trgovini s čevlji. Rdeči kupon je kupon za* 10 *evrov, ki ga lahko unovčiš pri nakupu, zeleni pa kupon za* 10 % *popusta na vrednost čevljev. Za katere vrednosti čevljev boš najprej unovčil rdeči kupon in nato zelenega, za katere vrednosti pa najprej zelenega in nato rdečega?*

REŠITEV: *Rdeči kupon nam vrednost x zniža na $x - 10$, torej mu ustreza funkcija $f(x) = x - 10$. Zeleni kupon nam vrednost zniža za* 10 %, *torej izhodiščni ceni x zniža ceno na $0.9 \cdot x$. Zato ustreza funkciji $g(x) = 0.9x$.*

Če bomo najprej unovčili rdeči in nato zeleni kupon, bomo za čevlje vrednosti x plačali

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x-10) = 0.9 \cdot (x-10) = 0.9 \cdot x - 9$$

evrov, v nasprotnem primeru pa

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(0.9 \cdot x) = 0.9 \cdot x - 10$$

evrov. Zanima nas torej, za katere x je $(f \circ g)(x) > (g \circ f)(x)$ in za katere $(f \circ g)(x) < (g \circ f)(x)$. Ker je $0.9 \cdot x - 10 < 0.9 \cdot x - 9$ za vse x, bomo vedno najprej unovčili zeleni kupon in šele nato rdečega.

PRIMER 2.1.5. *Za funkciji $f(x) = \sqrt{x}$ in $g(x) = x^4$ določi $f \circ g$ in $g \circ f$.*

REŠITEV: *Najprej opazimo, da velja $\mathcal{D}_f = [0, \infty)$ in $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$. Ker je $\mathcal{Z}_g = [0, \infty) \subseteq \mathcal{D}_f$, je*

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^4) = \sqrt{x^4} = x^2$$

za vse $x \in \mathcal{D}_g = \mathbb{R}$. Po drugi strani je $\mathcal{Z}_f = [0, \infty) \subseteq \mathcal{D}_g$ in zato

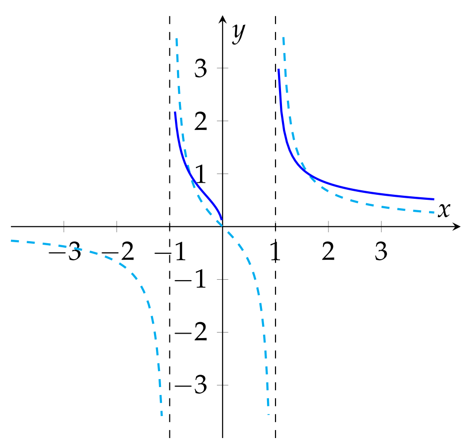
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \left(\sqrt{x}\right)^4 = x^2$$

za vse $x \in \mathcal{D}_f = [0, \infty)$. Torej kljub temu, da se predpisa za $f \circ g$ in $g \circ f$ ujemata, funkciji $f \circ g$ in $g \circ f$ zaradi različnih definicijskih območij nista enaki.

PRIMER 2.1.6. *Nariši graf funkcije*

$$f(x) = \sqrt{\frac{x}{x^2 - 1}}.$$

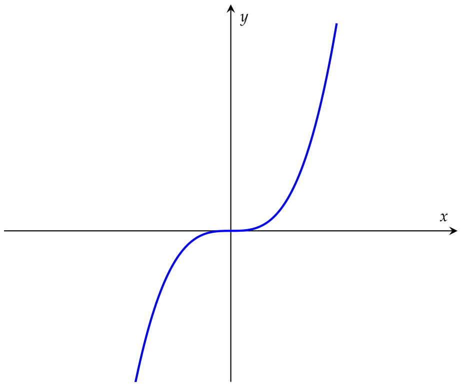
REŠITEV: *Graf lahko narišemo s pomočjo kompozituma funkcij. Če definiramo racionalno funkcijo $g(x) = \frac{x}{x^2-1}$ in korensko funkcijo $h(x) = \sqrt{x}$, potem je $f = h \circ g$. Zato narišemo graf funkcije $y = (h \circ g)(x)$ tako, da najprej narišemo graf funkcije $y = g(x)$, nato pa vrednosti $g(x)$ korenimo kar na grafu. Pri tem upoštevamo, da je $\mathcal{D}_h = [0, \infty)$, zatorej je točka x v definicijskem območju kompozituma $f = h \circ g$ le, če je $g(x) > 0$. Graf funkcije g je narisan z modro črtkano črto. Funkcija g zavzame pozitivne vrednosti na množici $(-1, 0] \cup (1, \infty)$, kjer narišemo njene korene z modro polno črto.*



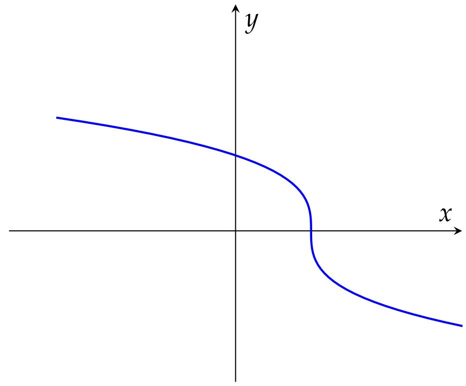
2.1.1. Lastnosti funkcij. Oglejmo si nekaj posebnih lastnosti, ki jih lahko imajo funkcije.

Funkcija f je

- *naraščajoča* na intervalu I, če je $f(x_1) < f(x_2)$ za vsaka $x_1, x_2 \in I$, kjer je $x_1 < x_2$.
- *padajoča* na intervalu I, če je $f(x_1) > f(x_2)$ za vsaka $x_1, x_2 \in I$, kjer je $x_1 < x_2$.



naraščajoča funkcija



padajoča funkcija

PRIMER 2.1.7. *Na katerem intervalu je funkcija $f(x) = x^2$ naraščajoča? Na katerem pa padajoča?*

REŠITEV: *Za nenegativni števili $0 \leq x_1 < x_2$ velja $x_1^2 < x_2^2$, zato je f naraščajoča na intervalu $[0, \infty)$. Hkrati pa je funkcija $f(x) = x^2$ padajoča na intervalu $(-\infty, 0]$, saj če za nepozitivni števili velja $x_1 < x_2$, sledi $x_1^2 > x_2^2$.*

Funkcija f je *omejena* na intervalu $[a, b]$, če obstajata takšni števili $m, M \in \mathbb{R}$, da velja

$$m \leq f(x) \leq M$$

za vse $x \in [a, b]$. Pri tem število M imenujemo *zgornja meja* funkcije f, število m pa *spodnja meja*.
Če je $f(x) \leq M$, pravimo, da je funkcija f *navzgor omejena*, če pa $m \leq f(x)$, pa pravimo, da je f *navzdol omejena*.

PRIMER 2.1.8. *Ali je katera od funkcij $f(x) = \cos 2x$, $g(x) = e^x$ omejena?*

REŠITEV: *Ker je $\mathcal{Z}_f = [-1, 1]$, je $\cos(2x)$ omejena funkcija. Po drugi strani je $\mathcal{Z}_g = (0, \infty)$, zato g ni omejena funkcija, je pa navzdol omejena.*

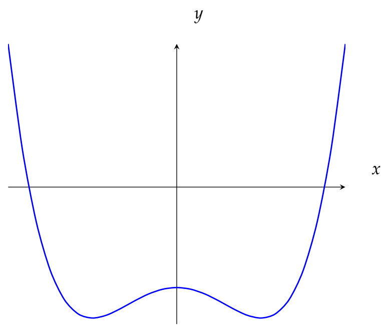
Naslednji dve lastnosti nam bosta pokazali morebitno simetrijo grafa funkcije.

Graf funkcije je simetričen glede na ordinatno os, če sta vrednosti $f(x)$ in $f(-x)$ enaki za vse $x \in \mathcal{D}_f$. To pomeni, da dobimo celoten graf funkcije $y = f(x)$ tako, da prezrcalimo čez ordinatno os tisti del grafa $y = f(x)$, kjer $x \geq 0$. Takšnim funkcijam bomo rekli *sode* funkcije.

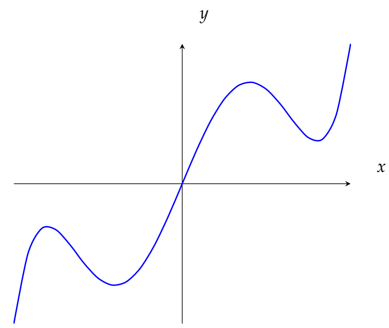
Če želimo narisati graf funkcije, ki je simetričen glede na koordinatno izhodišče, najprej narišemo graf $y = f(x)$, kjer $x \geq 0$, in ga nato zavrtimo okoli koordinatnega izhodišča za kot π. Takšne funkcije bomo imenovali *lihe* funkcije in zanje velja $f(-x) = -f(x)$.

Funkcija f je

- *soda*, če je $f(-x) = f(x)$ za vsak $x \in \mathcal{D}_f$,
- *liha*, če je $f(-x) = -f(x)$ za vsak $x \in \mathcal{D}_f$.



soda funkcija



liha funkcija

PRIMER 2.1.9. *Ali je katera od funkcij*

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

in $g(x) = x$ *soda ali liha?*

REŠITEV: *Ker velja*

$$f(-x) = |-x| = |x| = f(x),$$

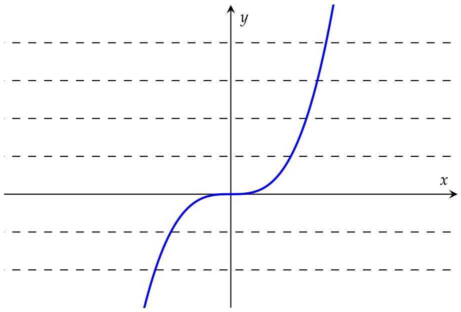
je funkcija f *soda. Za funkcijo* g *velja* $g(-x) = -x = -g(x)$ *in je zato liha.*

Večina funkcij pa ni niti soda niti liha, kot na primer funkcija $h(x) = e^x$.

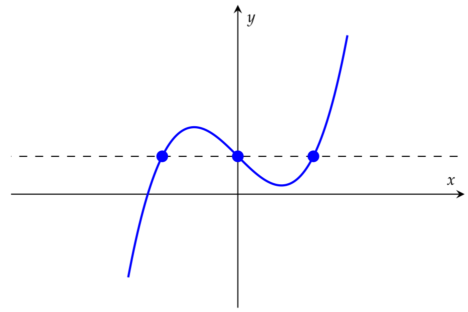
Injektivnost je pomembna lastnost funkcije, ki nam pove, ali funkcija priredi različnim številom različne vrednosti.

Funkcija $f\colon \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ je *injektivna*, če različni števili $x_1 \neq x_2$ iz definicijskega območja preslika v različni vrednosti $f(x_1) \neq f(x_2) \in \mathcal{Z}_f$.

To pomeni, da nobeni točki iz definicijskega območja nimata istih funkcijskih vrednosti. Z drugimi besedami, poljubna vodoravna premica seka graf injektivne funkcije v največ eni točki.



injektivna



ni injektivna

Funkcijo f smo si predstavljali kot magično škatlo, ki nam za vstavljene vrednosti x vrne njihove vrednosti $f(x)$. Za marsikakšno funkcijo pa nas bo pogosto zanimalo, iz katerega števila x je nastala vrednost $f(x)$.

PRIMER 2.1.10. *Spomnimo se primera 2.1.4 in trgovine s čevlji z rdečim in zelenim kuponom za popust. Na primer, da je tvoj prijatelj plačal 53 evrov za čevlje, pri čemer je najprej izkoristil zeleni in nato rdeči kupon. Zanima te, koliko je vrednost teh čevljev v trgovini brez dodatnih popustov.*

REŠITEV: *Denimo, da je vrednost omenjenih čevljev enaka x. Potem je prijatelj za njih plačal*

$$h(x) = 0.9 \cdot x - 10$$

evrov. Zatorej moramo rešiti enačbo

$$0.9 \cdot x - 10 = 53.$$

Če iz enačbe izrazimo x, dobimo rešitev $x = 70$.

V primeru 2.1.10 smo znali za število 53 določiti vrednost x, pri kateri je $h(x) = 53$. Če bomo za vsak $y \in \mathcal{Z}_h$ znali določiti tak x, da bo $h(x) = y$, bomo funkcijo, ki preslika vrednosti $h(x)$ v x, imenovali *inverzna funkcija* funkcije h. Jasno je, da inverzna funkcija lahko obstaja le, če je funkcija h injektivna, saj v nasprotnem inverzna funkcija ne bi bila enolična.

Naj bo $f\colon \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ injektivna funkcija. Funkcijo $f^{-1}\colon \mathcal{Z}_f \to \mathcal{D}_f$, za katero za vsak $x \in \mathcal{D}_f$ velja

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y,$$

imenujemo *inverzna funkcija* funkcije f.

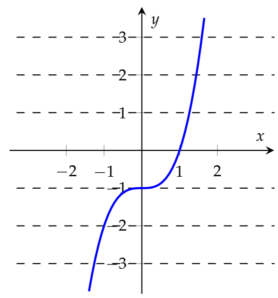
Inverzno funkcijo f^{-1} eksplicitno podane funkcije f izračunamo torej tako, da zamenjamo vlogi spremenljivk x in y v predpisu $y = f(x)$ in nato izrazimo y kot funkcijo x.

Menjava spremenljivk x in y na grafu funkcije pomeni zrcaljenje grafa preko premice $y = x$.

Pri zapisu inverzne funkcije f^{-1} pazimo, saj simbol f^{-1} ne pomeni vrednosti $\frac{1}{f}$, ampak je oznaka za novo funkcijo, in sicer inverzno funkcijo.

PRIMER 2.1.11. *Pokaži, da je funkcija $f(x) = x^3 - 1$ injektivna. Določi še f^{-1}.*

REŠITEV: *Najprej skicirajmo graf funkcije f. Ker vsaka vodoravna premica $y = a$ seka graf funkcije v eni točki, predvidevamo, da je funkcija injektivna.*



Pokažimo še formalno, da se ne more zgoditi, da bi za različna x_1 in x_2 imela funkcija f enaki vrednosti $f(x_1) = f(x_2)$. Če bi torej veljalo $f(x_1) = f(x_2)$, bi bilo $x_1^3 - 1 = x_2^3 - 1$. Če enakost $x_1^3 - x_2^3 = 0$ faktoriziramo, dobimo

$$(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) = 0.$$

Torej mora biti vsaj en od faktorjev enak nič. Če je prvi enak 0, je $x_1 = x_2$, če pa drugi, pa $x_1 = x_2 = 0$. V obeh primerih sledi $x_1 = x_2$ in zato je funkcija f injektivna.

Inverz funkcije določimo tako, da v predpisu

$$y = x^3 - 1$$

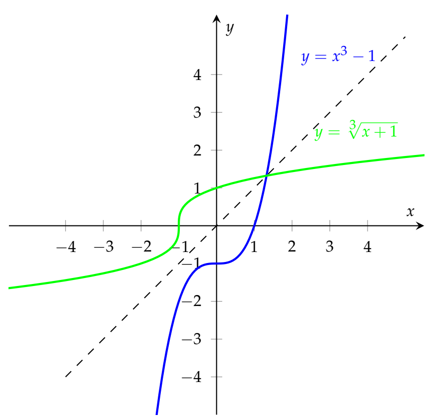
zamenjamo vlogi spremenljivk x in y:

$$x = y^3 - 1$$

in iz te zveze izrazimo y. To naredimo tako, da najprej ločimo y, da dobimo $y^3 = x + 1$, in nato izrazimo $y = \sqrt[3]{x+1}$.

Torej je inverzna funkcija podana s predpisom

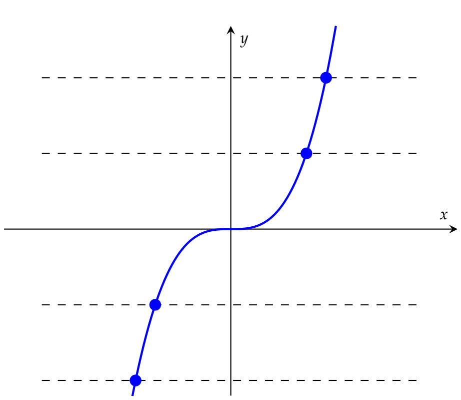
$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}.$$



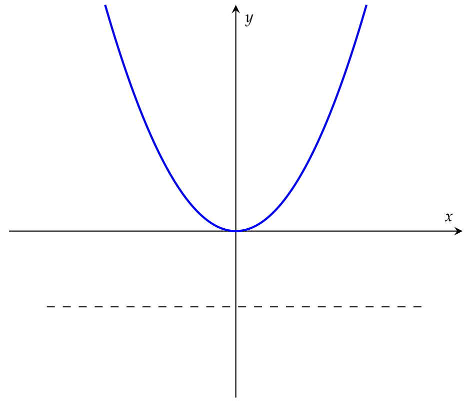
Funkcijam, katerih zaloga vrednosti je celotna množica realnih števil, pravimo *surjektivne* funkcije. Za njih velja, da je vsako realno ?tevilo y slika $y = f(x)$ nekega ?tevila x iz $\mathcal{D}_f$.

> Funkcija $f\colon \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ je *surjektivna*, če je $\mathcal{Z}_f = \mathbb{R}$.

Na grafu prepoznamo surjektivne funcije tako, da vsaka vodoravna premica $y = c$, kjer je $c \in \mathbb{R}$, seka graf surjektivne funkcije vsaj v eni točki.



surjektivna



ni surjektivna

Če bi želeli, da je inverzna funkcija definirana na vseh realnih številih, bi bilo potrebno dodatno predpostaviti tudi surjektivnost funkcije f.

Funkcija $f\colon \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ je *bijektivna*, če je injektivna in surjektivna.

2.2. Limite funkcij

V tem poglavju nas bo zanimalo, ali se vrednosti $f(x)$ funkcije f dovolj približujejo kakšnemu številu, ko se x približuje številu a. Če bo takšno število L obstajalo, bomo pisali

$$L = \lim_{x \to a} f(x).$$

Ta simbol bomo brali: *"Limita funkcije f, ko gre x proti a, je enaka L,"* ali na kratko: *"Število L je limita funkcije f v točki a"*.

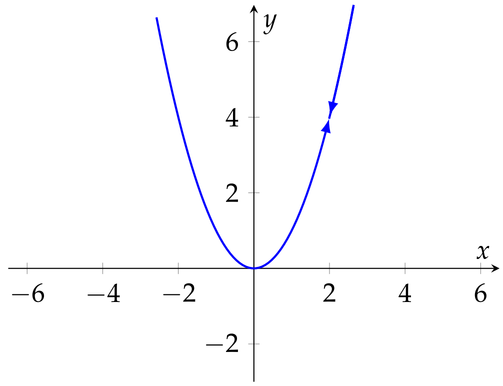
Intuitivno je torej limita funkcije f v točki a takšno število L, da ko je x čedalje bliže a (a ne enak a), so tudi vrednosti $f(x)$ čedalje bliže L. Oglejmo si približne vrednosti funkcije $f(x) = x^2$, ko se x približuje 2:

x	$f(x)$
1.9	3.61
1.99	3.96
1.999	3.996

x	$f(x)$
2.1	4.41
2.01	4.04
2.001	4.004

Domnevamo, da velja

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4.$$



Težava pa je v pojmu "blizu", saj ne vemo, kako blizu je dovolj blizu.

PRIMER 2.2.1. *Kako blizu mora biti x številu 2, da se bodo vrednosti funkcije* $f(x) = x^2$ *razlikovale od 4 za manj kot* 0.01*?*

REŠITEV: *Iščemo takšna števila x blizu 2 (a ne enaka 2), da bo veljalo, da se* $f(x)$ *od 2 razlikuje za manj kot* 0.01*. Z drugimi besedami, iščemo tak* δ*, da za* $0 < |x-2| < \delta$ *velja* $|f(x) - 4| < 0.01$*. Pogoj* $|f(x) - 4| < 0.01$ *je ekvivalenten pogoju* $|x^2 - 4| \leq 0.01$*, oziroma*

$$3.99 \leq x^2 \leq 4.01.$$

Ker je x blizu 2, mora biti x pozitivno število in zato velja

$$1.9975 \leq x < 2 \;\; \textit{ali pa} \;\; 2 < x \leq 2.0025.$$

S tem smo opazili, da za $\delta = 0.0025$ *velja sklep:*

$$\textit{če je} \;\; 0 < |x-2| < 0.0025, \;\; \textit{potem je} \;\; |f(x) - 4| < 0.01.$$

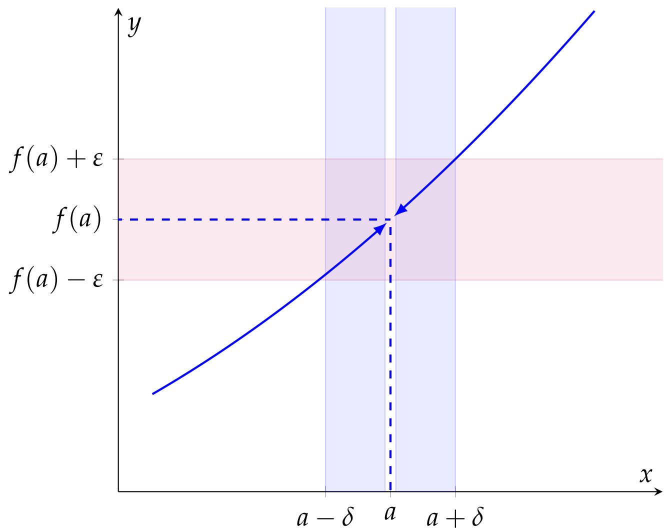
2.2.1. Definicija limite. V splošnem bo formalna definicija limite sledila primeru 2.2.1. Tradicionalno merimo razdaljo med x in a (torej vrednost $|x-a|$) z grško črko δ, razdaljo med $f(x)$ in L (torej vrednost $|f(x) - L|$) pa z ε. Če bomo želeli, da bo L limita funkcije f v točki a, bomo za vsak ε morali poiskati tak δ, da v primeru, ko se bodo števila x od a razlikovala za manj kot δ, se bodo tudi vrednosti $f(x)$ za manj kot ε razlikovala od L.

Število L je *limita* funkcije f v točki a, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da velja:

$$\text{če je} \;\; 0 < |x-a| < \delta, \;\; \text{potem je} \;\; |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Pišemo:

$$L = \lim_{x \to a} f(x).$$



Z drugimi besedami, če je podatek a podan z napako manjšo od δ, je vrednost $f(a)$ izračunana z napako manjšo od ε.

PRIMER 2.2.2. *Izračunajmo* $\lim_{x\to 1}(2x-3)$, *torej limito funkcije* $f(x) = 2x-3$ *v točki 1.*

REŠITEV: *Zdi se nam, da bi se morale vrednosti funkcije* $f(x) = 2x-3$ *približevati -1, ko se* x *približuje 1. Želimo pokazati, da ko bodo vrednosti* x *blizu 1, bodo vrednosti* $f(x)$ *blizu -1. Ali bolj formalno, da za vsak* ε *(ne le za* $\varepsilon = 0.01$*, kot v primeru 2.2.1) obstaja tak* δ*, da za* $0 < |x-1| < \delta$*, velja tudi* $|f(x)-(-1)| < \varepsilon$*. Pogoj* $|f(x)-(-1)| < \varepsilon$ *je ekvivalenten pogoju* $|2x-2| < \varepsilon$*, oziroma*

$$2-\varepsilon < 2x < 2+\varepsilon.$$

Če neenakosti delimo z 2, dobimo

$$1-\frac{\varepsilon}{2} < x < 1+\frac{\varepsilon}{2},$$

oziroma $|x-1| < \frac{\varepsilon}{2}$*. Torej je naš kandidat za okolico* δ *kar* $\frac{\varepsilon}{2}$*.*

Definirajmo torej $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ *in izberimo tak* x*, da velja* $0 < |x-1| < \delta$*. Potem je*

$$|(2x-3)-(-1)| = 2|x-1| < 2\delta = \varepsilon.$$

S tem smo pokazali, da

$$\text{če je } 0 < |x-1| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}, \text{ potem je } |f(x)-(-1)| < \varepsilon$$

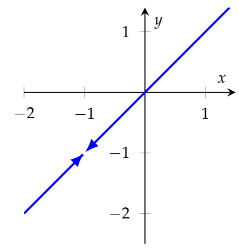
in zato je

$$\lim_{x\to 1}(2x-3) = -1.$$

Pozorni moramo biti na to, da limita funkcije f v točki a ni odvisna od vrednosti $f(a)$, torej od vrednosti funkcije f v točki a. Pomembno je le, kako se f obnaša v okolici točke a.

V primeru 2.2.2 je bila $\lim_{x\to 1}(2x-3) = -1$ in tako limita -1 sovpada z vrednostjo $f(-1)$ funkcije $f(x) = 2x-3$ v točki -1. Oglejmo si nekaj primerov, ko se limita v točki a razlikuje od vrednosti funkcije v točki a.

PRIMER 2.2.3. *Naj bo* $f(x) = \frac{x^2+x}{x+1}$*. Ali obstaja* $f(-1)$*? Ali obstaja* $\lim_{x\to -1} f(x)$*?*



REŠITEV: *Najprej opazimo, da je* $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ *in zato* $f(-1)$ *ne obstaja. Pa vendar obstaja* $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$, *čeprav vrednost* $f(-1)$ *ni definirana. Predpis funkcije* $f(x)$ *je namreč enak*

$$f(x) = \frac{x^2+x}{x+1} = \frac{x(x+1)}{x+1} = x.$$

Zato je

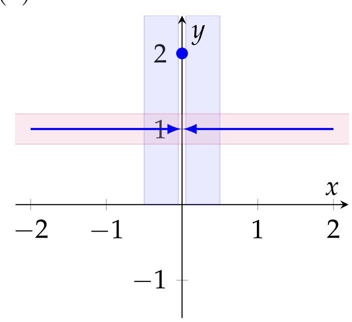
$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} x = -1.$$

PRIMER 2.2.4. *Naj bo*

$$g(x) = \begin{cases} 2, & x = 0, \\ 1, & x \neq 0. \end{cases}$$

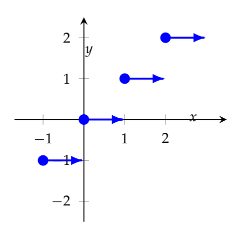
Ali obstaja $g(0)$*? Ali obstaja* $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$*?*

REŠITEV: *Po definiciji velja* $g(0) = 2$.



Hkrati velja $g(x) = 1$ *za vse vrednosti* x *blizu* 0, *če je le* x *različen od 0. Zato je* $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$, *kar pa se razlikuje od vrednosti* $g(0) = 2$.

PRIMER 2.2.5. *Naj bo* $h(x) = \lfloor x \rfloor$, *kjer* $\lfloor x \rfloor$ *označuje največje celo število, ki je manjše ali enako* x. *Ali obstaja* $h(2)$*? Ali obstaja* $\lim\limits_{x\to 2} h(x)$*?*



REŠITEV: *Najprej opazimo, da je* $\mathcal{D}_h = \mathbb{R}$ *in* $h(2) = \lfloor 2 \rfloor = 2$.

Na primer, da je $\lim\limits_{x\to 2} h(x) = L$. *To pomeni, da so vse vrednosti* $h(x)$ *blizu* L, *ko je* x *blizu 2. Ker so za števila* x, *kjer je* $2 \leq x < 3$, *vrednosti* $\lfloor x \rfloor$ *dejansko enake* 2, *je edini kandidat* $L = 2$. *Če izberemo mero za "blizu"*$\varepsilon = 0.5$, *bi moralo torej veljati: če je* $0 < |x-2| < \delta$, *potem je* $|\lfloor x \rfloor - 2| < 0.5$. *Števila, katerih celi del je za manj kot* 0.5 *oddaljen od* 2, *so natanko* $x \in [2, 3)$. *Kar pa hkrati pomeni, da za* $2 - \delta < x < 2$ *velja* $|\lfloor x \rfloor - 2| = 1 > 0.5$. *Zato limita* $\lim\limits_{x\to 2} h(x)$ *ne obstaja, pa vendar je* $h(2) = 2$.

V primeru 2.2.5 smo opazili, da so se vrednosti $h(x)$ za števila x, ki so blizu in desno od 2, res približevala vrednosti 2. Po drugi strani pa so se vrednosti $h(x)$ za števila x, ki so levo od 2 približevala vrednosti 1. Tako je smiselno definirati posebej levo limito in posebej desno limito funkcije v dani točki, kar bomo naredili v naslednjem razdelku.

2.2.2. Leva in desna limita. Ker so v definiciji limite funkcije f v točki a pomembne le vrednosti v okolici točke a, nikakor pa vrednost $f(a)$, nam opazovanje množice $0 < |x - a| < \delta$ naravno razpade na dva intervala: levega $(a - \delta, a)$, ko je x manjši od a, in desnega $(a, a + \delta)$, ko je x večji od a.

Tako lahko definiramo šibkejša pojma. Prvi bo *leva limita* funkcije v točki a, ki proučuje funkcijske vrednosti $f(x)$ za tiste x, ki ležijo na intervalu levo od a, t.j. $x \in (a - \delta, a)$.

Število L je *leva limita* funkcije f v točki a, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da velja:

$$\text{če je } a - \delta < x < a, \text{ potem je } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Označimo:

$$L = \lim_{x \nearrow a} f(x).$$

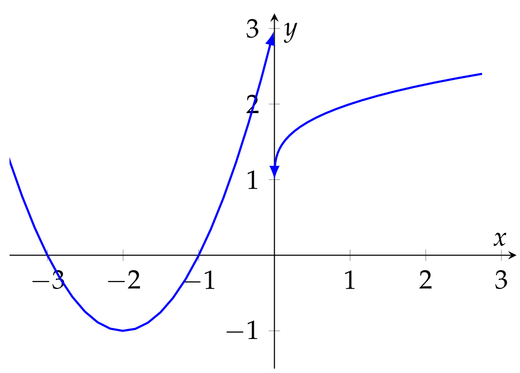
Podobno nam bo *desna limita* funkcije v točki a proučevala funkcijske vrednosti $f(x)$ za tiste x, ki ležijo na intervalu desno od a, t.j. $x \in (a, a + \delta)$.

Število L je *desna limita* funkcije f v točki a, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da velja:

$$\text{če je } a < x < a + \delta, \text{ potem je } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Označimo:

$$L = \lim_{x \searrow a} f(x).$$



$$\lim_{x \nearrow 0} f(x) = 3 \text{ in } \lim_{x \searrow 0} f(x) = 1$$

PRIMER 2.2.6. *Naj bo* $h(x) = \lfloor x \rfloor$ *kot v primeru 2.2.5. Ali obstaja* $\lim_{x \nearrow 2} h(x)$*? Ali obstaja* $\lim_{x \searrow 2} h(x)$*?*

REŠITEV: *V primeru 2.2.5 smo ugotovili, da so vrednosti funkcije h enake 2, ko se z x z desne približujemo 2, njene vrednosti pa enake 1, ko se z x z leve približujemo 2. Zato je*

$$\lim_{x\nearrow 2} h(x) = 1 \ \ in \ \ \lim_{x\searrow 2} h(x) = 2,$$

kljub temu, da limita $\lim_{x\to 2} g(x)$ ne obstaja.

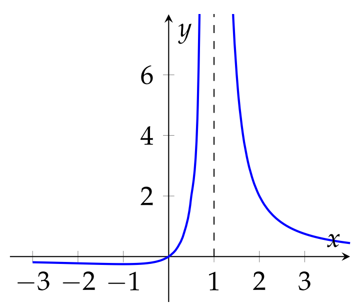
Če združimo definiciji leve in desne limite v točki a, prepoznamo definicijo limite.

> Število L je limita funkcije f v točki a natanko tedaj, ko je L hkrati leva in desna limita funkcije f v točki a.

2.2.3. Neskončna limita in limita v neskončnosti. Dogovoriti se moramo še za nekaj oznak, ki nam bodo posplošile pojem limite na neskončne limite in limite v neskončnosti. Namreč, doslej smo predpostavili, da sta tako število a kot limita L realni števili.

PRIMER 2.2.7. *Naj bo $f(x) = \frac{x}{(x-1)^2}$. Ali obstaja $\lim_{x\to 1} f(x)$?*

REŠITEV: *Če skiciramo graf funkcije $f(x) = \frac{x}{(x-1)^2}$, se nam dozdeva, da bodo v okolici števila $x = 1$ vrednosti funkcije $f(x)$ naraščale preko vseh mej.*



Tudi, če izračunamo vrednosti funkcije v bližini točke $x = 1$, to potrjuje našo domnevo.

x	$f(x)$
0	0
0.9	100
0.99	10000
0.999	1000000

x	$f(x)$
2	2
1.1	100
1.01	10000
1.001	1000000

Formalno torej ne moremo reči, da se vrednosti funkcije f približujejo nekemu številu L, a vseeno bi radi poudarili, da vrednosti naraščajo preko vseh mej.

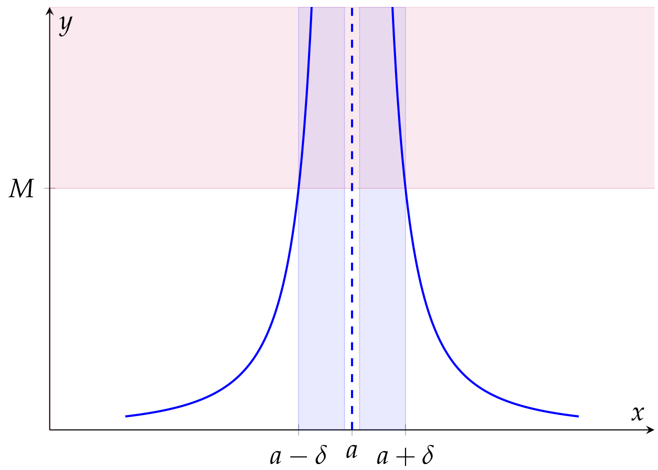
To bomo zapisali kot

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \infty.$$

Pri tem je ∞ le oznaka in nam ne predstavlja realnega števila.

S simbolom
$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$
bomo označevali, da funkcija f doseže poljubno velike vrednosti, ko se x približuje vrednosti a (in je $x \neq a$).

Formalno to pomeni, da za vsako realno število M obstaja tak $\delta > 0$, da za vse x, kjer $0 < |x-a| < \delta$ velja $f(x) > M$.



Podobno označimo tudi enostranske neskončne limite.

S simbolom
$$\lim_{x\nearrow a} f(x) = \infty$$
bomo označili, da funkcija f doseže poljubno velike vrednosti, ko se x z leve približuje vrednosti a (torej je $x < a$), s simbolom
$$\lim_{x\searrow a} f(x) = \infty$$
pa, da funkcija f doseže poljubno velike vrednosti, ko se x z desne približuje vrednosti a (torej je $x > a$).

Po drugi strani lahko funkcije tudi padajo pod vse meje.

S simbolom
$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$
bomo označili, da funkcija f doseže poljubno majhne vrednosti, ko se x približuje vrednosti a (in je $x \neq a$).

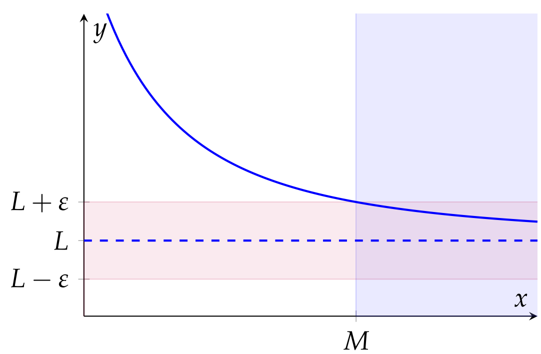
Ali formalno, za vsako realno število m obstaja tak $\delta > 0$, da za vse x, kjer $0 < |x-a| < \delta$, velja $f(x) < m$.

S simbolom
$$\lim_{x \nearrow a} f(x) = -\infty$$
bomo označili, da funkcija f doseže poljubno majhne vrednosti, ko se x z leve približuje vrednosti a (torej je $x < a$), s simbolom
$$\lim_{x \searrow a} f(x) = -\infty$$
pa, da funkcija f doseže poljubno majhne vrednosti, ko se x z desne približuje vrednosti a (torej je $x > a$).

Skoraj vedno nas zanima tudi obnašanje funkcije v neskončnosti, torej tam, kjer x narašča ali pada preko vseh mej.

Če se vrednosti funkcije f približujejo številu L, ko x narašča preko vseh mej, potem bomo pisali
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L.$$
Podobno, če se vrednosti funkcije f približujejo številu L, ko x pada pod vse meje, potem bomo pisali
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L.$$

Ali formalno $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja takšno realno število M, da za vse $x > M$ velja $|f(x) - L| < \varepsilon$.



Če vrednosti funkcije f naraščajo preko vseh mej, ko gre $x \to \infty$, pišemo
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty.$$
To pomeni, da za vsako realno število M obstaja tako realno število N, da za vse $x > M$ velja $f(x) > N$.

2.2.4. Računanje z limitami. Ni se težko prepričati, da za računanje limit funkcij veljajo enaka pravila kot pri računanju z zaporedji. Lahko je verjeti, da če se vrednosti funkcije f približujejo številu L, se bodo vrednosti funkcije αf približevale vrednosti αL. Velja

$$\lim_{x \to a} (\alpha f(x)) = \alpha \lim_{x \to a} f(x)$$ 8

za vsak $\alpha \in \mathbb{R}$.

Prav tako je mogoče po definiciji preveriti, da za vrednosti $f(x)$ blizu števila L in vrednosti $g(x)$ blizu števila K, potem lahko sklepamo, da so vrednosti vsote $f(x) + g(x)$ blizu $L + K$ in vrednosti produkta $f(x)g(x)$ blizu LK. Zatorej velja:

$$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$ 9

in

$$\lim_{x \to a} (f(x)g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \ \lim_{x \to a} g(x).$$ 10

Podobno bi se prepričali, da velja

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)},$$ 11

če le $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$.

Teh lastnosti formalno ne bomo dokazovali. Vse omenjene lastnosti veljajo tudi za enostranske limite in limite v neskončnosti.

Tudi vse limite, ki jih poznamo iz razdelka 1.1.4, lahko prevedemo na neskončne limite funkcij. Na primer, izkaže se, da velja tudi

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Sedaj uvedimo novo spremenljivko $t = \frac{1}{x}$, oziroma $x = \frac{1}{t}$. Ko gre $x \to \infty$, gre $t \to 0$ in zato velja

$$\lim_{t \to 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}} = e.$$ 12

PRIMER 2.2.8. *Izračunaj naslednje limite:*

(a.) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2}{x^2 - 2x - 4}$

(b.) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2 - 2x - 4}$

(c.) $\lim\limits_{x \nearrow 1} \frac{|x+1|}{x^2 + 3x + 2}$

(d.) $\lim\limits_{x\searrow 1} \frac{|x+1|}{x^2+3x+2}$

REŠITEV:

(a.) *Ko gre $x \to 2$, gresta tako števec kot imenovalec proti končnima vrednostima. S pomočjo pravil* 11, 9 *in* 8 *tako dobimo:*

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2}{x^2-2x-4} = \frac{\lim\limits_{x\to 2} x^2}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-2x-4)} = \frac{4}{\lim\limits_{x\to 2} x^2 - \lim\limits_{x\to 2} 2x - \lim\limits_{x\to 2} 4} = \frac{4}{4-4-4} = -1.$$

(b.) *Pri izračunih limit v neskončnosti uporabimo podobne trike kot pri računanju limit zaporedij (glej tudi primer 1.1.7):*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2-2x-4} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1-\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}} = \frac{1}{1-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x} - \lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}} = \frac{1}{1-0-0} = 1.$$

(c.) *Absolutna vrednost $|x+1|$ je definirana kot*

$$|x+1| = \begin{cases} x+1, & x \geq -1, \\ -(x+1), & x \leq -1. \end{cases}$$

Ker računamo levo limito, ko gre x z leve proti -1, za $x < -1$ velja $|x+1| = -(x+1)$ in zato sledi:

$$\lim_{x\nearrow -1} \frac{|x+1|}{x^2+3x+2} = \lim_{x\nearrow -1} \frac{|x+1|}{(x+1)(x+2)} = \lim_{x\nearrow -1} \frac{|x+1|}{x+1} \lim_{x\nearrow -1} \frac{1}{x+2} = -1\cdot(-1) = 1.$$

(d.) *Ko pa se x z desne približuje -1, je $x > -1$ in zato $|x+1| = x+1$. Sledi:*

$$\lim_{x\searrow -1} \frac{|x+1|}{x^2+3x+2} = \lim_{x\searrow -1} \frac{|x+1|}{(x+1)(x+2)} = \lim_{x\searrow -1} \frac{|x+1|}{x+1} \lim_{x\searrow -1} \frac{1}{x+2} = 1\cdot(-1) = -1.$$

Prav tako kot velja 6, tudi za funkcije velja izrek o sendviču:

Če za funkcije f, g in h velja

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

za vse $x \neq a$ dovolj blizu a in je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = L$, potem je tudi 13

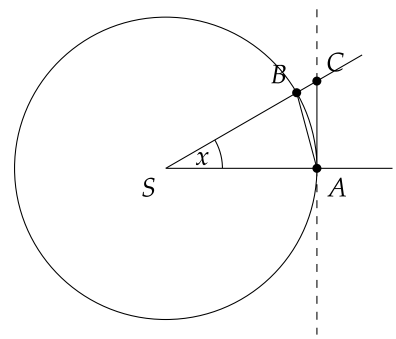
$$\lim_{x\to a} g(x) = L.$$

Izreka formalno ne bomo dokazali, omenimo pa, da velja tako za dvostranske kot tudi za enostranske limite.

Naslednjo limito bomo potrebovali pri računanju s kotnimi funkcijami. Izračunali jo bomo geometrijsko s pomočjo izreka o sendviču.

PRIMER 2.2.9. *Izračunaj limito* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$.

REŠITEV:



Na sliki je narisana krožnica s središčem S in polmerom 1. Na krožnici si izberimo takšni točki A in B, da je kot $x = \angle ASB$ med 0 in $\frac{\pi}{2}$ (v radianih), ki ga oklepata daljici SA in SB. V točki A narišimo tangento na krožnico in s C označimo presečišče tangente s poltrakom SB.

Ploščina krožnega izseka $\triangleleft SAB$ s središčnim kotom x je enaka $\frac{x}{2\pi}$ delu ploščine kroga s polmerom 1, torej

$$p_{\triangleleft SAB} = \frac{x}{2\pi} \cdot \pi \cdot 1^2 = \frac{x}{2}.$$

Ploščina krožnega izseka $\triangleleft SAB$ je ujeta med ploščini trikotnikov $\triangle SAB$ in $\triangle SAC$:

$$p_{\triangle SAB} \leq p_{\triangleleft SAB} \leq p_{\triangle SAC}.$$

Trikotnik $\triangle SAB$ je enakokrak trikotnik z dolžinama stranic $|SA| = |SB| = 1$ in kotom x med njima. Zato je njegova ploščina enaka $p_{\triangle SAB} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin x = \frac{\sin x}{2}$. Trikotnik $\triangle SAC$ je pravokotni trikotnik s pravim kotom pri A in z dolžinama katet $|SA| = 1$ in $|AC| = \tan x$. Zato je njegova ploščina enaka $p_{\triangle SAB} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x = \frac{\tan x}{2}$. Iz tako izračunanih ploščin dobimo, da za poljuben $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ velja

$$\frac{\sin x}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\tan x}{2}.$$

Neenakosti sedaj pomnožimo z $\frac{2}{\sin x}$. To lahko storimo, saj je za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ vrednost $\sin x$ pozitivna. Sledi

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}.$$

Ker so vse tri strani neenakosti pozitivne za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, lahko neenakosti obrnemo, tako da vsako od treh vrednosti nadomestimo z njej obratno vrednostjo:

$$1 \geq \frac{\sin x}{x} \geq \cos x.$$

Sedaj poračunamo limite, ko se x z desne približuje 0. Ker je $\lim_{x\searrow 0} 1 = 1$ in $\lim_{x\searrow 0} \cos x = 1$, po 13 velja tudi

$$\lim_{x\searrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{3}$$

V primeru, ko je $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, označimo $t = -x \in (0, \frac{\pi}{2})$. S to zamenjavo spremenljivk in upoštevanjem, da je $\sin x$ liha funkcija, po (3) sledi

$$\lim_{x\nearrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{t\searrow 0} \frac{\sin(-t)}{-t} = \lim_{t\searrow 0} \frac{-\sin t}{-t} = \lim_{t\searrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

S tem smo pokazali, da sta tako leva kot desna limita funkcije $\frac{\sin x}{x}$ v točki 0 enaki 1, iz česar sledi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

S pomočjo limite

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1} \qquad 14$$

lahko računamo limite kotnih funkcij v okolici točke 0.

PRIMER 2.2.10. *Izračunaj limito* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{x^2}$.

REŠITEV: *V ulomku* $\frac{1-\cos(2x)}{x^2}$ *se tako števec kot imenovalec približujeta 0, ko gre* $x \to 0$. *Zato bo potrebno ulomek preurediti. S pomočjo pravila za računanje dvojnih kotov (glej stran 164) lahko števec zapišemo kot* $1-\cos(2x) = 2\sin^2 x$. *S tem in s pomočjo* $\boxed{14}$ *dobimo*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 x}{x^2} = 2\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{x} = 2\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2.$$

2.3. Zveznost funkcij

2.3.1. Zveznost v točki. Ugotovili smo, da vrednost limite v dani točki ni odvisna od vrednosti funkcije v tej točki. Če ti dve vrednosti sovpadata, pravimo, da je funkcija v dani točki *zvezna*.

Funkcija f je *zvezna* v točki a, če

$$\lim_{x\searrow a} f(x) = f(a) = \lim_{x\nearrow a} f(x)$$

ali ekvivalentno, če

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Z drugimi besedami: za funkcijo f, ki je zvezna v točki a iz definicijskega območja f obstaja limita $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ in je ta limita enaka vrednosti $f(a)$. To pomeni, da se vrednosti $f(x)$ funkcije f, ki je zvezna v točki a, le malo razlikujejo od vrednosti $f(a)$, ko je x blizu a. Njen graf pa je v točki $(a, f(a))$ nepretrgana krivulja.

Na primer, funkcija $f(x) = x^2$ je zvezna v točki 2, saj velja $\lim\limits_{x\searrow 2} x^2 = \lim\limits_{x\nearrow 2} x^2 = 2^2 = 4$.

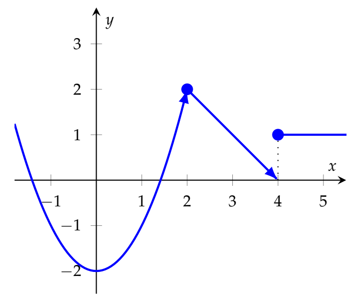
Po drugi strani pa funkcija $h(x) = \lfloor x \rfloor$ ni zvezna v točki 2, saj smo v primeru 2.2.5 izračunali, da je $\lim\limits_{x\searrow 2} \lfloor x \rfloor = 2$ in $\lim\limits_{x\nearrow 2} \lfloor x \rfloor = 1$. Tudi na grafu funkcije $h(x) = \lfloor x \rfloor$ opazimo, da v točki $x = 2$ naredi skok.

Prav tako funkcija $g(x) = \begin{cases} 2, & x = 0, \\ 1, & x \neq 0, \end{cases}$ definirana in narisana v primeru 2.2.4, ni zvezna v točki 0. Sicer sta njena leva in desna limita v točki 0 enaki, saj velja $\lim\limits_{x\searrow 0} g(x) = \lim\limits_{x\nearrow 0} g(x) = 1$, a nista enaki vrednosti $g(0) = 2$.

PRIMER 2.3.1. *Ali je funkcija*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & x < 2, \\ -x + 4, & 2 \leq x < 4, \\ 1, & x \geq 4 \end{cases}$$

zvezna v točki 2? Ali je f *zvezna v točki 4?*



REŠITEV: *Za odgovor na vprašanje, ali je funkcija zvezna v točki 2, moramo poračunati levo limito, desno limito in njeno vrednost v točki 2. Ker velja*

$$\lim_{x\nearrow 2} f(x) = \lim_{x\nearrow 2}(x^2-2) = 2,$$
$$\lim_{x\searrow 2} f(x) = \lim_{x\searrow 2}(-x+4) = 2$$

in

$$f(2) = -2+4 = 2,$$

je funkcija zvezna v točki $x = 2$.

Po drugi strani pa je

$$\lim_{x\nearrow 4} f(x) = \lim_{x\nearrow 4}(-x+4) = 0 \text{ in } \lim_{x\searrow 4} f(x) = \lim_{x\searrow 4}(1) = 1,$$

iz česar sledi, da f *ni zvezna v točki* $x = 4$.

Če je f zvezna v točki a, potem po definiciji velja $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Iz $\boxed{8}$ sledi, da velja tudi

$$\lim_{x\to a} \alpha f(x) = \alpha \lim_{x\to a} f(x) = \alpha f(a).$$

Torej zveznost funkcije f v točki a implicira zveznost funkcije αf v točki a.

Naj bosta sedaj f in g zvezni funkciji v točki a, torej naj velja $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ in $\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$. Iz $\boxed{9}$ in $\boxed{10}$ sledi

$$\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = f(a)+g(a) = (f+g)(a)$$

in

$$\lim_{x\to a}(fg)(x) = \lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x) = f(a)g(a) = (fg)(a).$$

S tem smo pokazali, da zveznost funkcij f in g v točki a implicira zveznost funkcij $f+g$ ter fg v točki a. Podobno pokažemo, da je, ko velja $g(a) \neq 0$, tudi $\frac{f}{g}$ zvezna v točki a.

> Če sta f in g zvezni funkciji v točki a, potem so tudi αf, $f+g$, fg zvezne v točki a, funkcija $\frac{f}{g}$ pa je zvezna v a, če je $g(a) \neq 0$.

Izkaže pa se tudi naslednja trditev, ki je ne bomo dokazali.

> Vse elementarne funkcije so zvezne v vsaki točki definicijskega območja.

Denimo, da so vrednosti funkcije g v točki a blizu števila L in naj bo f zvezna funkcija. Če so vrednosti x blizu a, potem se nam zdi intuitivno, da bodo vrednosti $f(g(x)) = (f\circ g)(x)$ blizu $f(L)$. Tega dejstva tu ne bomo dokazovali. Zapomnimo si le, da velja naslednja trditev.

> Če je $\lim_{x\to a} g(x) = L$ in je funkcija f zvezna v točki L, velja
>
> $$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(\lim_{x\to a} g(x)).$$ $\boxed{15}$

Enaka zveza velja tudi za limito v neskončnosti ter enostranske limite.

PRIMER 2.3.2. *Izračunaj limito* $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$.

REŠITEV: *Za izračun limite bomo naredili manjši trik. Najprej izračunajmo limito* $\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x - 1}$. *Vpeljimo novo neznanko* $x = \log(1+t)$, *oziroma* $t = e^x - 1$. *Ko gre* $x \to 0$, *gre* $t \to e^0 - 1 = 0$, *saj je eksponentna funkcija zvezna, in tako velja*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x - 1} = \lim_{t\to 0} \frac{\log(1+t)}{t} = \lim_{t\to 0} \log(1+t)^{\frac{1}{t}}.$$

Ker je logaritem zvezna funkcija, lahko po $\boxed{15}$ *menjamo vrstni red limitiranja in logaritmiranja in nato z uporabo* $\boxed{12}$ *dobimo*

$$\lim_{t\to 0} \log(1+t)^{\frac{1}{t}} = \log\left(\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right) = \log(e) = 1.$$

S tem smo izračunali, da je $\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x - 1} = 1$ *in zato po lastnosti* $\boxed{11}$ *velja tudi* $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{1} = 1$.

Trditev $\boxed{15}$ nam pove, da lahko zamenjamo vrsti red računanja limite.

Naj bosta f in g zvezni funkciji in točka a v definicijskih območjih funkcij g in $f \circ g$. Potem po $\boxed{15}$ velja

$$\lim_{x\to a}(f \circ g)(x) = \lim_{x\to a} f(g(x)) = f(\lim_{x\to a} g(x)) = f(g(a))$$

in zato po definiciji zveznosti velja tudi naslednja trditev.

Če sta f in g zvezni funkciji, sta zvezna tudi kompozituma $f \circ g$ in $g \circ f$.

Z nekaj dela bi lahko preverili, da je tudi inverzna funkcija zvezne funkcije zvezna funkcija.

PRIMER 2.3.3. *Določi definicijsko območje, limite na robu definicijskega območja in skiciraj funkcijo*

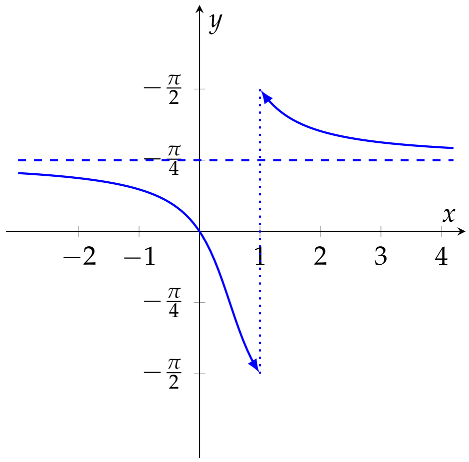
$$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{x-1}\right).$$

REŠITEV: *Funkcijo* f *lahko zapišemo tudi kot kompozitum funkcij* $f = g \circ h$, *kjer je* $g(x) = \arctan x$ *ter* $h(x) = \frac{x}{x-1}$. *Ker je* $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$, *je* $\mathcal{D}_f = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

Ker je $g(x) = \arctan x$ *zvezna funkcija, velja:*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\searrow -\infty} \arctan\left(\frac{x}{x-1}\right) &= \arctan\left(\lim_{x\searrow -\infty} \frac{x}{x-1}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}, \\
\lim_{x\nearrow 1} \arctan\left(\frac{x}{x-1}\right) &= \arctan\left(\lim_{x\nearrow 1} \frac{x}{x-1}\right) = -\frac{\pi}{2}, \\
\lim_{x\searrow 1} \arctan\left(\frac{x}{x-1}\right) &= \arctan\left(\lim_{x\searrow 1} \frac{x}{x-1}\right) = \frac{\pi}{2}, \\
\lim_{x\nearrow \infty} \arctan\left(\frac{x}{x-1}\right) &= \arctan\left(\lim_{x\nearrow \infty} \frac{x}{x-1}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Sedaj lahko narišemo graf funkcije f.



2.3.2. Razširitev funkcij. Če vrednost $f(a)$ ni definirana, vendar pa obstaja limita $\lim_{x\to a} f(x)$, lahko funkcijo f *razširimo* tako, da definiramo

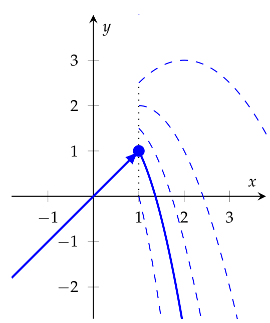
$$f(a) = \lim_{x\to a} f(x).$$

Tako razširjena funkcija je zvezna v točki a.

PRIMER 2.3.4. *Določi takšno število b, da bo funkcija*

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 1, \\ -bx^2 + 2x + 1, & x \geq 1, \end{cases}$$

zvezna v točki 1.



REŠITEV: *Da bo funkcija f zvezna v točki 1, mora veljati $\lim_{x\nearrow 1} f(x) = f(1) = \lim_{x\searrow 1} f(x)$, torej*

$$\lim_{x\nearrow 1} x = -b + 2 + 1 = \lim_{x\searrow 1} -bx^2 + 2x + 1.$$

Če izračunamo vsako limito posebej, dobimo enakost

$$1 = -b + 3,$$

oziroma $b = 2$. Sklepamo, da je funkcija f zvezna, ko je $b = 2$.

Na sliki je s črtkanimi črtami narisana cela družina funkcij f, medtem ko je s polno črto narisana tista izmed njih, pri kateri je $b = 2$.

2.3.3. Zveznost na intervalu. Pojem zveznosti v točki lahko razširimo na pojem zveznosti na intervalu.

Funkcija f je *zvezna na odprtem intervalu* (a, b), če je zvezna v vsaki točki $x \in (a, b)$.

Ta definicija velja tudi, če je (a, b) neomejen interval, torej če je na primer enak množici realnih števil $\mathbb{R}$.

PRIMER 2.3.5. *Ali je funkcija*

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \leq 0, \\ -x + 1, & x > 0 \end{cases}$$

povsod zvezna?

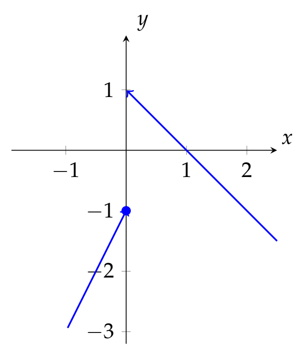
REŠITEV: *Vsak od predpisov* $2x - 1$ *ter* $-x + 1$ *je zvezna funkcija v vaki točki, kjer je definirana. Zato moramo preveriti le, ali je funkcija* f *zvezna v točki* 0*, kjer se obe linearni funkciji zlepita. Ker velja*

$$\lim_{x \nearrow 0} f(x) = \lim_{x \nearrow 0} (2x - 1) = -1$$

ter

$$\lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} (-x + 1) = 1,$$

funkcija f *ni zvezna.*



Funkcija je *zvezna na zaprtem intervalu* $[a, b]$, če je zvezna v vsaki točki $x \in (a, b)$ in velja

$$f(a) = \lim_{x \searrow a} f(x) \text{ in } f(b) = \lim_{x \nearrow b} f(x).$$

2.3.4. Lastnosti zveznih funkcij. Omenili smo, da je graf zvezne funkcije neprekinjena krivulja. Torej, če začnemo risati v točki $(a, f(a))$ in končamo v točki $(b, f(b))$, moramo graf $y = f(x)$ zvezne funkcije f narisati v eni potezi. Zato je lahko verjeti (a težje dokazati) naslednji dve lastnosti zveznih funkcij.

Prva nam zagotavlja obstoj ničle zvezne funkcije na zaprtem intervalu, kjer ima funkcija v krajiščih različno predznačeni vrednosti.

Če je funkcija f zvezna na zaprtem omejenem intervalu $[a, b]$ in sta vrednosti $f(a)$ ter $f(b)$ različno predznačeni, potem obstaja takšna točka $c \in (a, b)$, da velja $f(c) = 0$.

Takšno točko c lahko poiščemo algoritmično z *bisekcijo*, torej z deljenjem intervalov na pol. Oglejmo si to na primeru.

PRIMER 2.3.6. *Poišči približek ničle funkcije* $f(x) = x^3 + x - 1$ *na intervalu* $[0, 1]$.

REŠITEV: *Za dano funkcijo* $f(x) = x^3 + x - 1$ *ne znamo uganiti njenih ničel na intervalu* $[0,1]$. *Ampak, ker je* $f(0) = -1$ *ter* $f(1) = 1$, *funkcija* f *pa zvezna, ima gotovo ničlo med 0 in 1.*

Zato interval $[0,1]$ *razpolovimo, da bomo videli, na kateri polovici intervala ima* f *ničlo. Ker je* $f(0.5) = -0.375$, *ima funkcija* f *na robu intervala* $[0.5, 1]$ *različno predznačeni vrednosti in zato ničla leži med* 0.5 *in* 1. *Ker je* $f(0.75) = 0.172$, *ima funkcija* f *na robu intervala* $[0.5, 0.75]$ *različno predznačeni vrednosti in zato ničla leži med* 0.5 *in* 0.75.

Nadaljujemo s postopkom razpolavljanja in računanja vrednosti. Ker je $f(0.625) = -0.131$, *ničla leži med* 0.625 *in* 0.75. *Ker je* $f(0.6875) = 0.012$, *ničla leži med* 0.625 *in* 0.6875. *Ker je* $f(0.65625) = -0.061$, *ničla leži med* 0.65625 *in* 0.6875. *Izračunamo še* $f(0.671875) = -0.025$, $f(0.679688) = -0.006$ *ter* $f(0.683594) = 0.003$. *Sklepamo, da ničla leži na intervalu* $(0.679688, 0.683594)$ *in lahko bi rekli, da je približno enaka* 0.681641.

Postopek bisekcije lahko poljubno dolgo nadaljujemo, pri čemer je smiselno pri izračunu uporabiti računalnik. Če se ustavimo v nekem koraku in ocenimo vrednost rešitve kot razpolovišče intervala, potem je napaka, ki jo naredimo pri oceni, enaka polovici dolžine intervala. Zaporedje približkov, ki jih dobimo med postopkom bisekcije, pa konvergira k rešitvi enačbe.

Velja še več:

Zvezna funkcija $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ na intervalu $[a,b]$ zavzame vsako vrednost med svojo natančno spodnjo mejo m in svojo natančno zgornjo mejo M.

Torej za vsak $t \in [m, M]$ obstaja tak $x_t \in [a,b]$, da je

$$f(x_t) = t,$$

in zvezna funkcija preslika omejen zaprt interval $[a,b]$ na omejen zaprt interval $[m, M]$,

$$f([a,b]) = [m, M].$$

Da pa bomo zares znali izračunati najmanjšo in največjo vrednost funkcije f na intervalu $[a,b]$, se moramo začeti pogovarjati o odvodih.

POGLAVJE 3

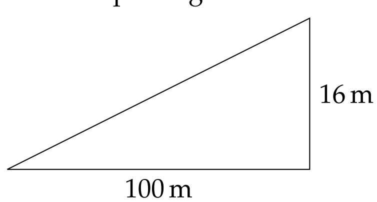
Odvod

Odvod je ključna beseda pri raziskovanju lastnosti funkcije. Ko bomo želeli izračunati naklon krivulje v dani točki, ko bomo želeli določiti najmanjšo in največjo vrednost funkcije, ko bomo računali približke funkcije, in še mnogokrat bomo vedno znova uporabili *odvod* funkcije.

Odvod funkcije v dani točki nam pove, kako strm je graf funkcije v tej točki. Torej po definiciji je odvod hitrost spreminjanja funkcije.

3.1. Odvod funkcije v točki

Pri vožnji s kolesom nas med drugim zanima strmina klančine, to je strmina ceste, ki se vzpenja na hrib. Pri tem je strmina klančine v odstotkih definirana kot nadmorska višina (v metrih), ki jo premagamo na 100 metrov dolžine. Torej 16 % strmina klančine nam pove, da na dolžini 100 metrov premagamo višinsko razliko 16 metrov.

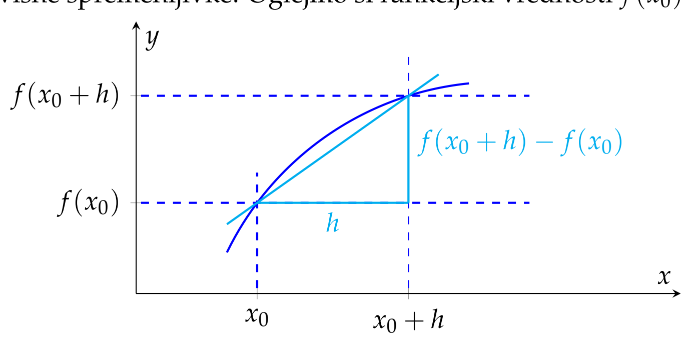


$$\frac{16\,\text{m}}{100\,\text{m}} = 0.16 = 16\,\%$$

Z drugimi besedami, strmina je kvocient spremembe nadmorske višine in dolžine 100 metrov.

Velja tudi v splošnem. Ta parameter, kvocient spremembe vrednosti funkcije in spremembe neodvisne spremenljivke, nam pove, kako strm je graf funkcije. Večji kot so prirastki, bolj strm je njen graf. Če so prirastki pozitivni, a majhni, potem funkcija narašča in njen graf je položen. Če je prirastek v vsaki točki nekega intervala enak 0, se vrednost funkcije ne spremeni, kar pomeni, da je funkcija konstantna.

Naj bo $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ dana funkcija in $x_0 \in (a,b)$ izbrana točka. S h bomo označevali spremembo neodvisne spremenljivke. Oglejmo si funkcijski vrednosti $f(x_0)$ in $f(x_0+h)$.

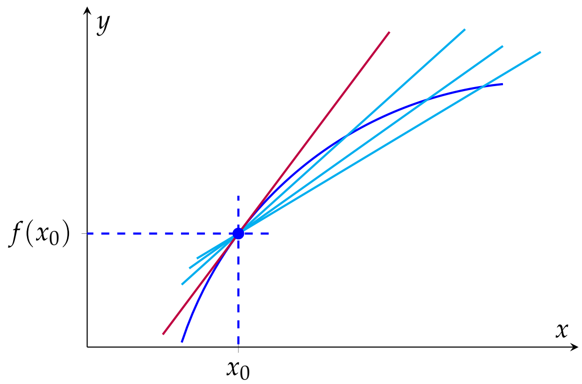


Ko se vrednost x_0 poveča za h, se vrednost funkcije f spremeni za razliko funkcijskih vrednosti $f(x_0+h)-f(x_0)$. Večje kot so spremembe razlike $f(x_0+h)-f(x_0)$ pri fiksni spremembi h, hitreje funkcija f narašča.

Kvocient spremembe funkcijskih vrednosti in spremembe neodvisne spremenljivke

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

nam pove, kako hitro se spreminja funkcija okoli točke x_0. Ta kvocient imenujemo *diferenčni kvocient* funkcije f v točki x_0. Diferenčni kvocient je enak smernemu koeficientu premice skozi točki $(x_0, f(x_0))$ in $(x_0+h, f(x_0+h))$. Med vsemi premicami, ki potekajo skozi točko $(x_0, f(x_0))$, se krivulji $y=f(x)$ v točki $(x_0, f(x_0))$ najbolje prilega njena tangenta, t.j. premica, ki se v točki $(x_0, f(x_0))$ dotika grafa $y=f(x)$.



Smernemu koeficientu tangente se približujemo, ko manjšamo prirastek h v diferenčnemu kvocientu. Zato je koeficient tangente v točki $(x_0, f(x_0))$ enak

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

To limito definiramo kot *odvod* funkcije f v točki x_0, saj nam določa strmino grafa v točki x_0.

Odvod funkcije f v točki x_0 je limita diferenčnega kvocienta

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Funkcija je *odvedljiva v točki x_0*, če obstaja $f'(x_0)$.

Odvod $f'(x_0)$ torej opiše spremembo funkcijske vrednosti $f(x_0)$, če se vrednost spremenljivke x_0 le malce spremeni. Geometrijsko nam odvod $f'(x_0)$ funkcije f v točki x_0 poda smerni koeficient tangente na graf $y=f(x)$ v točki $(x_0, f(x_0))$.

PRIMER 3.1.1. *Izračunaj odvod funkcije $f(x)=x$ v poljubni točki $x_0\in\mathcal{D}_f$.*

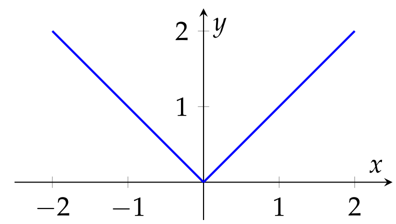
REŠITEV: *Po definiciji je v poljubni točki $x_0\in\mathbb{R}$*

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)-x_0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=\lim_{h\to 0}1=1.$$

Geometrijsko to pomeni, da se premica $y=x$ ves čas enako hitro spreminja. Njena tangenta ima v vsaki točki na premici koeficient 1 in sovpada s premico $y=x$.

Če je funkcija f odvedljiva v točki x_0, potem je v x_0 tudi zvezna. Funkcija, ki je zvezna v točki x_0, pa v točki x_0 ni nujno odvedljiva.

PRIMER 3.1.2. *Funkcija $f(x) = |x|$ je zvezna v točki 0, saj je leva limita v 0 enaka desni limiti v 0, obe pa sta enaki funkcijski vrednosti $|0| = 0$. Pokaži, da njen odvod v točki 0 ne obstaja.*



REŠITEV: *Če bi obstajal odvod funkcije $f(x) = |x|$ v točki 0, potem bi po definiciji obstajala limita*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}.$$

Ker je

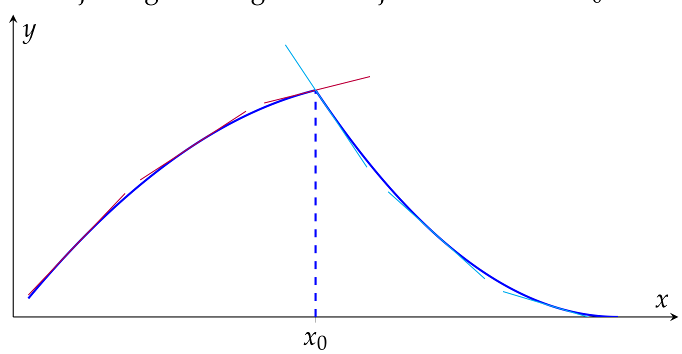
$$\lim_{h\searrow 0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\searrow 0} \frac{h}{h} = 1$$

in

$$\lim_{h\nearrow 0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\nearrow 0} \frac{-h}{h} = -1,$$

se leva in desna limita v točki 0 razlikujeta in zatorej ne obstaja $\lim\limits_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$. Posledično funkcija $f(x) = |x|$ v točki 0 ni odvedljiva.

Geometrijsko nam leva in desna limita diferenčnega kvocienta v točki x_0, če obstajata, povesta, kako se obnašajo tangente na graf funkcije v točkah blizu x_0.



Leva limita diferenčnega kvocienta nam pove, kakšna je strmina tangente na graf, ko se z leve približujemo točki x_0. Desna limita diferenčnega kvocienta pa nam pove, kakšna je strmina tangente na graf, ko se z desne približujemo točki x_0. Če se ti dve limiti razlikujeta, potem funkcija v točki x_0 ni odvedljiva. Njen graf je sicer lahko zvezen (lahko ga narišemo z eno potezo), ni pa gladek (krivulja se lomi).

3.2. Lastnosti odvoda funkcije

3.2.1. Definicija. Odvod funkcije v točki x_0 nam pove, kako hitro se spreminja vrednost funkcije f v točki x_0. Poglejmo na odvod nekoliko širše. Odvod lahko poskusimo izračunati v poljubni točki x iz definicijskega območja funkcije f. Tako dobimo novo funkcijo

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

ki pa je definirana samo v tistih točkah x, kjer je funkcija f odvedljiva.

Funkcija $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ je *odvedljiva na $\mathcal{D}$*, če je odvedljiva v vsaki točki definicijskega območja. Če je $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ odvedljiva na $\mathcal{D}$, potem funkcijo

$$\begin{aligned} f'\colon \mathcal{D} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}$$

imenujemo *odvod* funkcije f.

V primeru 3.1.1 smo videli, da je $f'(x_0) = 1$ za funkcijo $f(x) = x$ in poljuben $x_0 \in \mathcal{D}_f$. Zato je odvod funkcije $f(x) = x$ enak $f'(x) = 1$.

PRIMER 3.2.1. *Izračunaj odvod funkcije $f(x) = c$, kjer je c poljubna konstanta.*

REŠITEV: *V poljubni točki $x \in \mathbb{R}$ velja*

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

Zato je odvod poljubne konstantne funkcije enak 0.

PRIMER 3.2.2. *Izračunaj odvod funkcije $g(x) = \frac{1}{x}$.*

REŠITEV: *V poljubni točki $x \in \mathcal{D}_g$ velja*

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x-(x+h)}{h(x(x+h))} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}.$$

Zato je $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

PRIMER 3.2.3. *Izračunaj odvod funkcije $k(x) = e^x$.*

REŠITEV: *Po definiciji v poljubni točki $x \in \mathbb{R}$ velja*

$$k'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{k(x+h) - k(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}.$$

V primeru 2.3.2 smo izračunali, da je $\lim\limits_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = 1$, *in zato je*

$$(e^x)' = e^x.$$

16

Izkaže se, da je funkcija $f(x) = e^x$ edina funkcija, ki je enaka svojemu odvodu.

PRIMER 3.2.4. *Izračunaj odvod funkcije $\ell(x) = \sin x$.*

REŠITEV: *V poljubni točki $x \in \mathbb{R}$ velja*

$$\ell'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\ell(x+h) - \ell(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}.$$

Po formuli za računanje razlike trigonometrijskih funkcij (stran 164) je

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\sin(\frac{x+h-x}{2})\cos(\frac{x+h+x}{2})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\sin(\frac{h}{2})\cos(\frac{2x+h}{2})}{h}$$

Sedaj lahko po pravilu $\boxed{10}$ *limito zapišemo kot produkt*

$$\lim_{h\to 0} \frac{2\sin(\frac{h}{2})}{h} \cdot \lim_{h\to 0} \cos(\frac{2x+h}{2}).$$

Druga limita je enaka $\lim_{h\to 0} \cos(\frac{2x+h}{2}) = \cos x$, *prvo pa izračunamo po* $\boxed{14}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{2\sin(\frac{h}{2})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} = 1.$$

Sledi, da je

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x.} \qquad \boxed{17}$$

Tako lahko po definiciji izračunamo limito poljubne odvedljive funkcije. Vendar pa je takšno računanje zamudno, zato bomo spoznali pravila, kako iz znanih odvodov funkcij izpeljati odvode novih funkcij.

3.2.2. Pravila za računanje odvodov. Naj bosta f in g odvedljivi funkciji. Zanima nas, ali je tudi njuna vsota odvedljiva. Po definiciji odvoda lahko računamo

$$\begin{aligned}
(f+g)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \\
&= f'(x) + g'(x).
\end{aligned}$$

S tem smo pokazali, da je vsota odvedljivih funkcij odvedljiva in da je odvod vsote enak vsoti odvodov:

$$\boxed{(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x).} \qquad \boxed{18}$$

PRIMER 3.2.5. *Izračunaj odvod funkcije* $x + \frac{1}{x}$.

REŠITEV: *Ker moramo odvajati vsoto dveh funkcij, je odvod po* $\boxed{18}$ *in primerih 3.1.1 in 3.2.2 enak*

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)' = (x)' + \left(\frac{1}{x}\right)' = 1 - \frac{1}{x^2}.$$

Podobno postopamo pri odvodu produkta dveh odvedljivih funkcij. Po definiciji velja

$$\begin{aligned}(fg)'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{(fg)(x+h)-(fg)(x)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}.\end{aligned}$$

Sedaj v števcu prištejemo in odštejemo produkt $f(x+h)g(x)$. Tako zgornji izraz postane enak

$$\begin{aligned}(fg)'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} f(x+h)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + \lim_{h\to 0} g(x)\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.\end{aligned}$$

Ker je funkcija f odvedljiva, je tudi zvezna in zato velja

$$(fg)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x).$$

Torej je produkt dveh odvedljivih funkcij odvedljiva funkcija, odvod produkta pa izračunamo po naslednji formuli, ki je poznana kot Leibnizova formula.

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$ 19

V posebnem, če je ena od funkcij konstantna, je njen odvod enak 0 in tako dobimo, da je odvod večkratnika funkcije enak večkratniku odvoda funkcije:

$$(\alpha f)'(x) = \alpha f'(x).$$ 20

PRIMER 3.2.6. *S pomočjo popolne indukcije pokaži, da je odvod funkcije* $f(x) = x^n$ *enak* $f'(x) = nx^{n-1}$ *za poljubno naravno število* n.

REŠITEV: *Če je* $n = 0$*, potem smo v primeru 3.2.1 pokazali, da je odvod poljubne konstantne funkcije enak 0. Zato je za funkcijo* $x^0 = 1$ *njen odvod enak 0, kar sovpada s formulo* $0\cdot x^{-1} = 0$.

Predpostavimo, da za neko naravno število n *velja* $(x^n)' = nx^{n-1}$*. Potem po pravilu* $\boxed{19}$ *velja*

$$\left(x^{n+1}\right)' = (x^n\cdot x)' = (x^n)'\cdot x + x^n\cdot(x)'.$$

Po indukcijski predpostavki in primeru 3.1.1 je ta izraz nadalje enak

$$\left(x^{n+1}\right)' = nx^{n-1}\cdot x + x^n\cdot 1 = nx^n + x^n = (n+1)x^n.$$

Torej pravilo za odvajanje funkcije x^n *velja tudi za naslednik števila* n *in po principu popolne indukcije za vsa naravna števila.*

Podobno kot smo pokazali formulo 19, bi lahko pokazali tudi naslednje pravilo za odvajanje kvocienta dveh odvedljivih funkcij:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}, \qquad 21$$

kjer $g(x) \neq 0$.

PRIMER 3.2.7. *Izračunaj odvod funkcije x^{-n} za poljubno pozitivno celo število n.*

REŠITEV: *Ker je $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, lahko funkcijo $f(x) = x^{-n}$ odvajamo po pravilu 21:*

$$(x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{1' \cdot x^n - 1 \cdot (x^n)'}{(x^n)^2} = \frac{0 \cdot x^n - 1 \cdot nx^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}.$$

Primera 3.2.6 in 3.2.7 nam povesta, da za poljubno celo število n velja $(x^n)' = nx^{n-1}$. Dejansko za poljubno realno število $\alpha \in \mathbb{R}$ velja

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}. \qquad 22$$

V posebnem pri $\alpha = 0$ dobimo $1' = 0$, kar smo videli že v primeru 3.2.1, pri $\alpha = 1$ dobimo $x' = 1$ (primer 3.1.1) in pri $\alpha = -1$ iz 22 dobimo $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, kar smo pokazali že v primeru 3.2.2.

PRIMER 3.2.8. *Odvajaj funkciji $\sqrt{x}$ ter $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$.*

REŠITEV: *Funkciji zapišimo kot potenčni funkciji $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ ter $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = x^{-\frac{2}{3}}$. Sedaj odvajajmo po pravilu 22 in dobimo*

$$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ter

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)' = \left(x^{-\frac{2}{3}}\right)' = -\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}}.$$

V primeru 3.2.3 smo pokazali, da je $(e^x)' = e^x$. Iz te lastnosti pa ne sledi, da bi bil odvod funkcije e^{3x} enak e^{3x}. Namreč e^{3x} je kompozitum funkcij $f(x) = e^x$ in $g(x) = 3x$, to je $e^{3x} = (f \circ g)(x)$. Zato se moramo naučiti odvajati kompozitume funkcij. Brez dokaza navedimo naslednje zelo pomembno pravilo za odvajanje kompozituma funkcij:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) \qquad 23$$

in ga ilustrirajmo s primeri.

PRIMER 3.2.9. *Odvajaj funkcijo* e^{3x}.

REŠITEV: *Zapišimo* e^{3x} *kot kompozitum funkcij* $f(x) = e^x$ *in* $g(x) = 3x$, *torej* $e^{3x} = (f \circ g)(x)$. *Po* $\boxed{23}$ *najprej odvajamo funkcijo* f, *ki jo v kompozitumu naredimo nazadnje, nato odvajamo še funkcijo* g:

$$(e^{3x})' = e^{3x} \cdot (3x)' = 3e^{3x}.$$

PRIMER 3.2.10. *Odvajaj funkcijo* $\sqrt{\cos x^2}$.

REŠITEV: *Najprej zapišimo funkcijo kot kompozitum funkcij, ki jih znamo odvajati. Tako je* $\sqrt{\cos x^2} = (f \circ g \circ h)(x)$ *kompozitum funkcij* $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \cos x$ *in* $h(x) = x^2$. *Zato je po* $\boxed{23}$ *odvod enak*

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{\cos x^2}\right)' &= \frac{1}{2\sqrt{\cos x^2}} \cdot \left(\cos x^2\right)' = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\cos x^2}} \cdot (-\sin x^2) \cdot \left(x^2\right)' = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\cos x^2}} \cdot (-\sin x^2) \cdot 2x = -\frac{x \sin x^2}{\sqrt{\cos x^2}}.\end{aligned}$$

PRIMER 3.2.11. *Odvajaj funkciji* $\cos x$ *in* $\tan x$.

REŠITEV: *Ker že znamo odvajati funkcijo* $\sin x$ *(primer 3.2.4), lahko s pomočjo funkcije* $\sin x$ *odvajamo tudi funkcijo* $\cos x$. *Funkcijo* $\cos x$ *izrazimo kot* $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ *(stran 1) in s pomočjo pravila* $\boxed{23}$ *izračunamo*

$$\begin{aligned}(\cos x)' &= \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot (-1) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x.\end{aligned}$$

Tangens je definiran kot kvocient funkcij $\sin x$ *in* $\cos x$, *zatorej ga odvajamo po pravilu* $\boxed{21}$:

$$\begin{aligned}(\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \\ &= \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{(\cos x)^2} = \\ &= \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.\end{aligned}$$

S tem smo pokazali, da velja

$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x} \qquad \boxed{24}$$

in

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$ 25

PRIMER 3.2.12. *Odvajaj funkcijo a^x pri poljubni osnovi $a > 0$.*

REŠITEV: *Ker poznamo že odvod funkcije e^x, preoblikujmo a^x v*

$$a^x = e^{\log a^x} = e^{x \log a}.$$

Sedaj lahko odvajamo $e^{x \log a}$ kot kompozitum funkcij

$$(a^x)' = \left(e^{x \log a}\right)' = e^{x \log a} \cdot (x \log a)' = e^{\log a^x} \cdot \log a = a^x \log a.$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \log a.$$

Izkaže se, da je za odvedljivo in bijektivno funkcijo f njen inverz tudi odvedljiva funkcija. Izračunamo ga po naslednji formuli:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)},$$ 26

kjer $y = f(x)$ in $f'(y) \neq 0$. V praksi to pomeni, da za funkcijo f, ki jo želimo odvajati, poiščemo njen inverz. Če je $f'(x) \neq 0$ in $(f^{-1})'(f(x)) \neq 0$, potem po 26 izračunamo

$$f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(y)}, \tag{4}$$

kjer $y = f(x)$.

PRIMER 3.2.13. *Odvajaj funkcijo $f(x) = \log x$.*

REŠITEV: *Logaritemska funkcija $f(x) = \log x$ je definirana kot inverz funkcije $f^{-1}(x) = e^x$. Vemo, da je $\left(f^{-1}\right)'(x) = e^x$ in zato po (4) sledi $(\log x)' = \frac{1}{e^{\log x}} = \frac{1}{x}$. Velja torej*

$$(\log x)' = \frac{1}{x}.$$ 27

Če izberemo logaritemsko funkcijo pri drugi osnovi, povsem enako pokažemo, da velja

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \log a}.$$

PRIMER 3.2.14. *Odvajaj funkcijo $g(x) = \arcsin x$.*

REŠITEV: *Funkcija $g(x) = \arcsin x$ je definirana kot inverz funkcije $g^{-1}(x) = \sin x$. Vemo, da je $\left(g^{-1}\right)'(x) = \cos x$ in zato po* (4) *sledi*

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\sin(\arcsin x))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

S tem smo pokazali, da velja

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Prav tako lahko s pomočjo inverzne funkcije pokažemo, da velja

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

3.2.3. Višji odvodi. Naj bo funkcija $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ odvedljiva na nekem območju $\mathcal{D}$. Oglejmo si funkcijo $f'\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$. Če je tudi odvod f' odvedljiva funkcija, potem je f *dvakrat odvedljiva* na $\mathcal{D}$, odvod funkcije f' zapišemo kot

$$f''(x) = (f'(x))'$$

in ga imenujemo *drugi odvod* funkcije f. Ta nam pove, kako hitro se spreminja odvod f' funkcije f. Najbolj znan primer drugega odvoda je pospešek, ki je definiran kot odvod hitrosti gibanja delca. Če funkcija f opisuje gibanje delca v odvisnosti od časa, potem je odvod f' hitrost delca ob času x, drugi odvod f'' pa pospešek delca ob času x.

PRIMER 3.2.15. *Izračunaj drugi odvod funkcije $f(x) = \cos x$.*

REŠITEV: *Če najprej odvajamo funkcijo f, je njen odvod po* 24 *enak $f'(x) = -\sin x$. Da bi izračunali drugi odvod, moramo nadalje odvajati funkcijo f'. Po* 20 *in* 17 *velja*

$$f''(x) = (f'(x))' = (-\sin x)' = -(\sin x)' = -\cos x.$$

Če je funkcija $f''\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ odvedljiva, potem je f *trikrat odvedljiva* na $\mathcal{D}$, funkcijo

$$f'''(x) = (f''(x))'$$

pa imenujemo *tretji odvod* funkcije f. Če lahko funkcijo f n-krat odvajamo na $\mathcal{D}$, potem pravimo, da je funkcija f *n-krat odvedljiva* na $\mathcal{D}$, *n-ti odvod* funkcije f pa označimo z $f^{(n)}$ in ga rekurzivo definiramo kot

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'.$$

Funkcije, ki jih lahko poljubnokrat odvajamo, imenujemo *neskončnokrat odvedljive* funkcije.

PRIMER 3.2.16. *Izračunaj sto enajsti odvod funkcije $f(x) = \cos x$.*

REŠITEV: *V primeru 3.2.15 smo videli, da velja*

$$f'(x) = -\sin x$$

ter

$$f''(x) = -\cos x.$$

Če nadaljujemo z odvajanjem, dobimo

$$\begin{aligned} f^{(3)}(x) &= \sin x & f^{(7)}(x) &= \sin x \\ f^{(4)}(x) &= \cos x & f^{(8)}(x) &= \cos x \\ f^{(5)}(x) &= -\sin x & f^{(9)}(x) &= -\sin x \\ f^{(6)}(x) &= -\cos x & f^{(10)}(x) &= -\cos x \end{aligned}$$

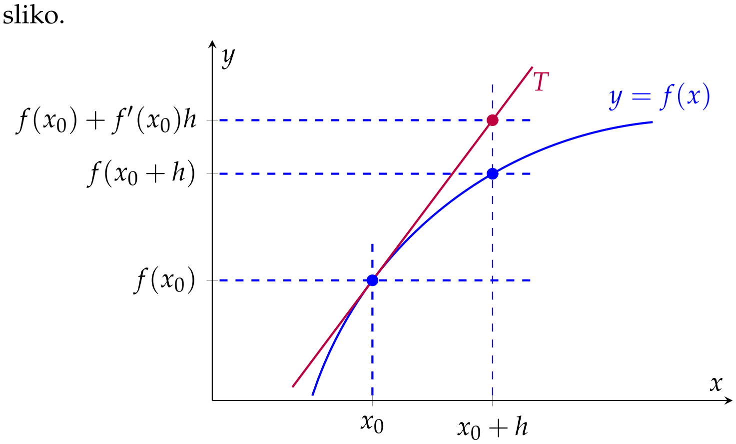
Opazimo, da se odvodi ponavljajo s periodo 4. Ker daje 111 *ostanek 3 pri deljenju s* 4, *velja*

$$f^{(111)}(x) = f^{(3)}(x) = \sin x.$$

3.3. Uporaba odvoda

3.3.1. Linearna aproksimacija. Denimo, da poznamo vrednost funkcije f v točki x_0, ne poznamo pa vrednosti v bližnji točki $x_0 + h$. Na primer, dobro vemo, da je $\sqrt{4} = 2$, ne poznamo pa vsi na pamet $\sqrt{4.03}$. Naša prva misel je, da je $\sqrt{4.03}$ približno enak $\sqrt{4} = 2$. Pa vendar lahko naredimo boljšo oceno. V tem razdelku si bomo ogledali, kako ocenimo vrednost funkcije s pomočjo prvega odvoda.

Oglejmo si sliko.



Dejanske vrednosti funkcije $f(x_0+h)$, označene z modro piko, ne poznamo. Ker se tangenta T na graf $y=f(x)$ v točki x_0 dotika grafa funkcije v točki x_0, se graf funkcije in tangenta T dobro ujemata v točkah blizu x_0. Za majhne h je torej rdeča točka na tangenti T dovolj blizu modri točki na grafu funkcije f.

Tangenta T gre skozi točko $(x_0, f(x_0))$, njen koeficient pa je enak odvodu funkcije f v točki x_0, torej $f'(x_0)$. Zato je enačba tangente T enaka $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$, oziroma

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0).$$

Vrednost, ki jo točka x_0+h doseže na tangenti T, je na sliki označena z rdečo piko in je enaka $f(x_0)+f'(x_0)h$. Ta vrednost je pri majhnih prirastkih h približno enaka vrednosti $f(x_0+h)$.

Pri majhnih h je

$$f(x_0+h) \doteq f(x_0) + f'(x_0)h. \qquad \boxed{28}$$

PRIMER 3.3.1. *Približno izračunaj* $\sqrt{4.03}$.

REŠITEV: *Iščemo približek funkcije* $f(x)=\sqrt{x}$ *v točki* $x_0+h=4.03$. *Ker poznamo vrednost funkcije* f *za* $x=4$, *izberemo* $x_0=4$ *in* $h=0.03$. *Po formuli* $\boxed{28}$ *je*

$$f(4.03) \doteq f(4) + f'(4)\cdot 0.03.$$

Ker velja $f'(x)=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, *je* $f'(4)=\frac{1}{4}$. *Sledi*

$$\sqrt{4.03} = f(4.03) \doteq 2 + \frac{1}{4}\cdot 0.03 = 2.0075.$$

Če izračunamo vrednost $\sqrt{4.03}$ *s pomočjo računala, je ta na prvih enajst decimalnih mest enaka* $\sqrt{4.03}=2.00748598999$.

Ugotovili smo, da se produkt $f'(x)h$ pri majhnih h dobro ujema s prirastkom funkcije $f(x+h)-f(x)$. Namesto prirastka h pišemo tudi dx. Pri tem količimo dx imenujemo *diferencial* neodvisne spremenljivke x. Za $y=f(x)$ definiramo

$$dy = f'(x)\,dx, \tag{5}$$

pri tem pa $dy=f'(x)\,dx$ imenujemo *diferencial* odvisne spremenljivke ali tudi *diferencial* funkcije f.

Pri tem je dy odvisen tako od x kot diferenciala dx. Na primer, če je $y=x^3$, potem je $dy=3x^2\,dx$.

Boljše ocene vrednosti funkcij v bližnjih točkah bi lahko dobili s pomočjo aproksimacije z višjimi odvodi. Če bi v formulo $\boxed{28}$ dodali sumand, ki vključuje tudi drugi odvod funkcije f, bi dobili še natančnejšo vrednost za $f(x_0+h)$:

$$f(x_0+h) \doteq f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2.$$

Izkaže se, da s pravilnim dodajanjem sumandov višjih odvodov dobimo zaporedje polinomov

$$P_n(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2!}f''(x_0)h^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(x_0)h^3 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)h^n,$$

ki čedalje bolje aproksimirajo vrednost $f(x_0+h)$. Te polinome imenujemo *Taylorjevi polinomi* in z njihovo pomočjo nam računala in računalniki na željeno število decimalnih mest izračunajo iracionalna števila, kot na primer $e^{\cos \sqrt[3]{12}}$.

3.3.2. Naraščanje in padanje funkcij. Spomnimo se, da nam odvod funkcije f v dani točki x_0 predstavlja smerni koeficient tangente na graf funkcije $y = f(x)$ v točki x_0. Če je torej funkcija f v točki x_0 naraščajoča, ima njena tangenta pozitiven koeficient. Podobno, če je funkcija f v točki x_0 padajoča, ima tangenta negativen koeficient.

Zato lahko za odvedljivo funkcijo $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ povemo naslednje:

> Če je v točki $x_0 \in (a,b)$ vrednost odvoda $f'(x_0) > 0$, je funkcija f v točki x_0 naraščajoča. Če je $f'(x_0) < 0$, je funkcija f v točki x_0 padajoča. 29

PRIMER 3.3.2. *Poišči intervale naraščanja in intervale padanja funkcije* $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$.

REŠITEV: *Najprej izračunajmo odvod funkcije*

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x^2 - x - 2) = 12x(x-2)(x+1).$$

Le-ta je polinom tretje stopnje in lahko spremeni predznak le v svojih ničlah $x_1 = 2$, $x_2 = 0$ *in* $x_3 = -1$. *Ker je vodilni koeficient pozitiven, za* $x > 2$ *velja* $f'(x) > 0$, *nato pa v vsaki ničli funkcija* f' *spremeni predznak, saj so vse ničle enojne. Torej je*

- $f'(x) > 0$ *(in tu funkcija narašča) za* $x \in (-1,0) \cup (2,\infty)$ *in*
- $f'(x) < 0$ *(in tu funkcija pada) za* $x \in (-\infty,-1) \cup (0,2)$.

Kaj lahko povemo o točkah x_0, kjer je $f'(x_0) = 0$, si bomo ogledali v naslednjem razdelku.

3.3.3. Stacionarne točke in ekstremi funkcij. Točke x_0, v katerih je vrednost odvoda enaka nič, bomo imenovali *stacionarne točke*. Takšne točke igrajo pomembno vlogo pri določanju maksimumov in minimumov funkcij, ki jih potrebujemo pri optimizacijskih nalogah. Najprej definirajmo, kaj so lokalni ekstremi funkcij. *Lokalni maksimum* je takšna točka x_0, da je vrednost funkcije $f(x_0)$ v točki x_0 večja ali enaka od vrednosti funkcije $f(x)$ za točke x, ki so dovolj blizu x_0. Ali formalno:

> Funkcija f ima v točki x_0 *lokalni maksimum*, če obstaja tak $\delta > 0$, da je
> $$f(x) \leq f(x_0)$$
> za vsak $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Če je pri tem neenačaj strogi, t.j. $f(x) < f(x_0)$ za vsak $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, pravimo, da je v točki x_0 strogi lokalni maksimum. Podobno definiramo *lokalni minimum* kot točko, v kateri je vrednost funkcije manjša ali enaka od vrednosti funkcije v bližnjih točkah.

> Funkcija f ima v točki x_0 *lokalni minimum*, če obstaja tak $\delta > 0$, da je
> $$f(x) \geq f(x_0)$$
> za vsak $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Če je pri tem neenačaj strogi, t.j. $f(x) > f(x_0)$ za vsak $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, pravimo, da je v točki x_0 strogi lokalni minimum.

Lokalne maksimume in lokalne minimume funkcije imenujemo *lokalni ekstremi* funkcije, stroge lokalne maksimume in stroge lokalne minimume funkcije pa strogi lokalni ekstremi funkcije,

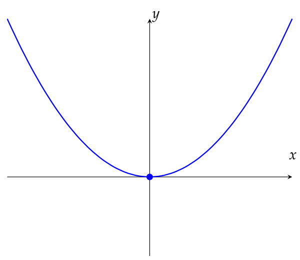
Funkcije imajo lahko veliko lokalnih ekstremov. Ni pa nujno, da v lokalnih ekstremih dosežejo tudi svojo največjo ali najmanjšo vrednost.

Funkcija $f\colon \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ ima v točki x_0 *globalni maksimum*, če velja
$$f(x) \leq f(x_0)$$
za vsak $x \in \mathcal{D}_f$. Podobno ima f *globalni minimum* v točki x_0, če velja
$$f(x) \geq f(x_0)$$
za vsak $x \in \mathcal{D}_f$.

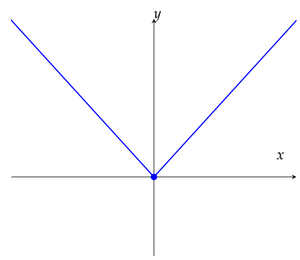
Globalne maksimume in globalne minimume funkcije imenujemo *globalni ekstremi* funkcije.

PRIMER 3.3.3. *Nariši grafe funkcij* $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$, $h(x) = x^3 - x$, $k(x) = |x|$ *in* $l(x) = \cos x$ *ter ugotovi, ali imajo funkcije lokalne ali globalne ekstreme.*

REŠITEV: *Funkcija* $f(x) = x^2$ *ima v točki* $x_0 = 0$ *lokalni in globalni minimum, saj za vse* x *velja* $f(x) \geq 0$*. Podobno velja tudi za funkcijo* $k(x) = |x|$*, da je njen lokalni (in globalni) minimum v točki* $x_0 = 0$*, saj za vse* x *velja* $h(x) \geq 0$*.*

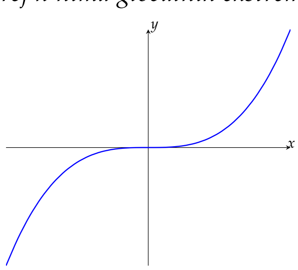


$f(x) = x^2$

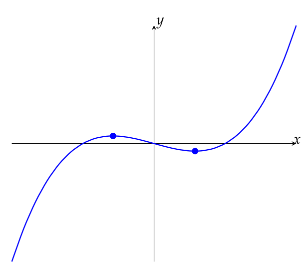


$k(x) = |x|$

Funkcija $g(x) = x^3$ *nima globalnih ekstremov, saj ni niti navzgor niti navzdol omejena. Ker je naraščajoča, tudi nima lokalnih ekstremov. V nasprotju z njo pa lahko iz grafa funkcije* h *razberemo, da ima funkcija* $h(x) = x^3 - x$ *dva lokalna ekstrema, en lokalni maksimum in en lokalni minimum. Nobeden od teh pa ni globalni ekstrem, saj je funkcija* h *polinom lihe stopnje, ki narašča in pada preko vseh meja. Zatorej* h *nima globalnih ekstremov.*

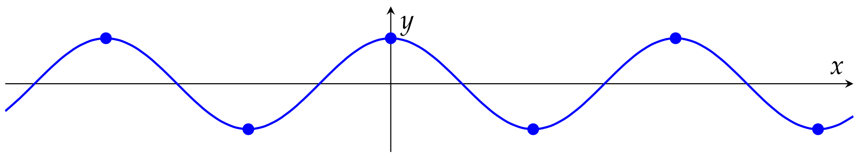


$g(x) = x^3$



$h(x) = x^3 - x$

Funkcija $l(x) = \cos x$ *ima neskončno lokalnih minimumov in neskončno lokalnih maksimumov, ki so vsi tudi globalni ekstremi.*



Na strani 46 smo spoznali, da zvezna funkcija na zaprtem intervalu zavzame vse svoje vrednosti med globalnim minimumom m in globalnim maksimumom M. Nič pa še nismo povedali, kako vrednosti m in M izračunati. V primeru 3.3.3 lahko opazimo, da imata odvedljivi funkciji f in h v svojih lokalnih ekstremih vodoravni tangenti. Zatorej so odvodi $f'(0)$, $h'(x_1)$ in $h'(x_2)$, kjer sta x_1 in x_2 točki, v katerih ima funkcija h lokalni ekstrem, vsi enaki 0. Naslednji izrek pravi, da je to splošno res za vse odvedljive funkcije. Če ima namreč odvedljiva funkcija f v točki x_0 lokalni ekstrem, potem v tej točki niti ne narašča, niti ne pada. Ker ne narašča, po $\boxed{29}$ sledi, da je $f'(x_0) \leq 0$. Ker ne pada, pa po isti trditvi velja, da je $f'(x_0) \geq 0$. Sledi, da mora biti $f'(x_0) = 0$.

> Če za funkcijo f v točki x_0 obstaja njen odvod in ima f v x_0 lokalni ekstrem, potem je $f'(x_0) = 0$. $\boxed{30}$

Z drugimi besedami: če želimo poiskati lokalne ekstreme odvedljive funkcije f, jih moramo iskati med točkami, v katerih ima odvod f' funkcije f ničle.

> *Stacionarna* (ali *kritična*) točka funkcije f je takšna točka $x_0 \in \mathcal{D}_f$, za katero velja $f'(x_0) = 0$.

V stacionarni točki je torej koeficient tangente enak 0 in zato je tangenta na graf vodoravna. Izrek $\boxed{30}$ pove, da če želimo iskati lokalne ekstreme odvedljive funkcije, jih moramo iskati med stacionarnimi točkami. Posebej pazimo na to, da izrek $\boxed{30}$ ne pove, katere od stacionarnih točk so tudi lokalni ekstremi. Niti nam ne pove, kje ima lahko funkcija lokalne ekstreme v točkah, v katerih odvod ne obstaja. Na primer, funkcija $k(x) = |x|$ ima v točki $x_0 = 0$ lokalni minimum. Pa vendar točka $x_0 = 0$ ni stacionarna točka, saj funkcija k ni odvedljiva v $x_0 = 0$. Poglejmo si nekaj primerov.

PRIMER 3.3.4. *Poiščimo stacionarne točke funkcije* $h(x) = x^3 - x$.

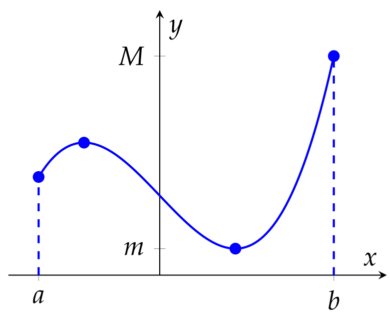
REŠITEV: *Stacionarne točke funkcije h so ničle odvoda* $h'(x) = 3x^2 - 1$. *Rešitvi enačbe* $h'(x) = 0$, *oziroma* $3x^2 - 1 = 0$, *sta dve:* $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ *ter* $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. *Torej sta* x_1 *in* x_2 *stacionarni točki funkcije h. V primeru 3.3.3 smo videli, da ima funkcija h dva lokalna ekstrema. Ker je po* $\boxed{30}$ *vsak lokalni ekstrem tudi stacionarna točka, morata biti* x_1 *in* x_2 *tudi lokalna ekstrema funkcije h.*

PRIMER 3.3.5. *Poiščimo stacionarne točke funkcije* $g(x) = x^3$.

REŠITEV: *Stacionarne točke funkcije g so ničle odvoda $g'(x) = 3x^2$, torej je edina stacionarna točka $x = 0$. V primeru 3.3.3 smo videli, da 0 ni lokalni ekstrem funkcije g kljub temu, da je 0 stacionarna točka. To pomeni, da obrat izreka 30 ne velja, ni vsaka stacionarna točka tudi lokalni ekstrem.*

3.3.4. Globalni ekstremi. Velikokrat se srečujemo s problemom, ko je potrebno poiskati največjo ali najmanjšo vrednost odvedljive funkcije na zaprtem intervalu $[a, b]$. To pomeni, da iščemo globalne ektreme funkcije na intervalu $[a, b]$.

Oglejmo si torej zvezno funkcijo $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, ki je odvedljiva na (a, b) in se vprašajmo, kje ima svoje globalne ekstreme.

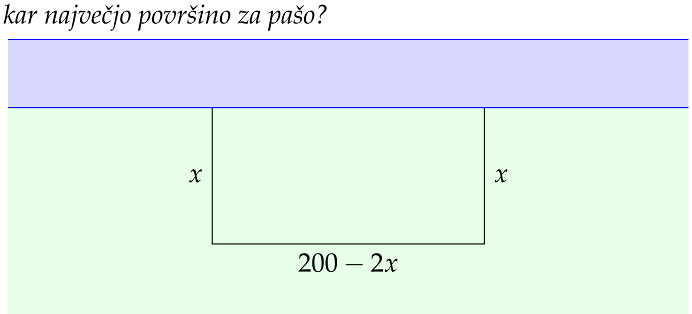


Opazimo, da je ena možnost, da ima funkcija globalni ekstrem v lokalnem ekstremu, kot ima na primer funkcija x^2 svoj globalni minimum v točki 0. Druga možnost je, da ga ima na robu intervala, kot na primer ima funkcija x^2 svoj globalni maksimum na robu intervala. Drugje funkcija ne more imeti globalnega ekstrema.

Da bi določili globalni ekstrem odvedljive funkcije $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, lahko naredimo sledeče:

(1) Določimo vse stacionarne točke $x_1, x_2, \ldots, x_s$ funkcije f in izračunamo vrednosti funkcije f v stacionarnih točkah: $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_s)$.
(2) Določimo vrednosti $f(a)$ in $f(b)$ funkcije na robu območja.
(3) Izberemo največjo in najmanjšo vrednost med vsemi vrednostmi $f(x_1)$, $f(x_2), \ldots, f(x_s)$, $f(a)$ in $f(b)$ iz točk (1) in (2).

PRIMER 3.3.6. *Ob reki je velik travnik, na katerem želi kmet ograditi pravokotno območje za pašo svojih ovc. Na voljo ima dovolj materiala za postavitev* 200m *dolge ograje, pri tem pa mu ni potrebno ograditi strani ob reki. Koliko naj bo dolgo in koliko široko pravokotno območje, ki ga naj kmet ogradi, da bodo imele ovce kar največjo površino za pašo?*



REŠITEV: *Naj bosta stranici pravokotnika, ki sta pravokotni na reko, dolžine x. Ker lahko kmet porabi* 200m *ograje, mu bo preostalo* $200 - 2x$ *metrov ograje za stranico pravokotnika, ki je vzporedna z reko. Ploščina ograjenega območja je enaka*

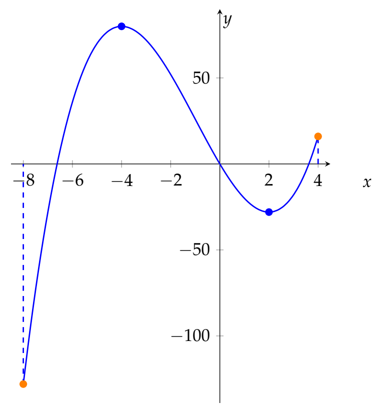
$$p(x) = (200 - 2x)x = 200x - 2x^2,$$

kjer je x lahko poljubno realno število z intervala $[0, 100]$. *Iščemo tak x, da bo ploščina največja možna. Za določitev globalnega maksimuma funkcije p potrebujemo njene stacionarne točke. Ker je*

$$p'(x) = 200 - 4x,$$

je stacionarna točka funkcije p enaka $x = 50$. *Ker je* $p(0) = 0$ *in* $p(100) = 0$, *je stacionarna točka* $x = 50$ *globalni maksimum funkcije p. Zatorej mora kmet ograditi pravokotnik dolžine* 100m *in širine* 50m, *da bo ploščina ograjenega območja največja možna.*

PRIMER 3.3.7. *Določimo največjo in najmanjšo vrednost funkcije* $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x$ *na intervalu* $[-8, 4]$.



REŠITEV: *Globalne ekstreme odvedljive funkcije izberemo izmed vrednosti funkcije v stacionarnih točkah in na robu območja.*

(1) *Odvod funkcije f je*

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 24 = 3(x+4)(x-2).$$

Stacionarne točke funkcije f so v ničlah odvoda f', torej ima funkcija f dve stacionarni točki: $x_1 = -4$ *in* $x_2 = 2$. *Funkcijski vrednosti v stacionarnih točkah pa sta*

$$f(-4) = 80 \text{ ter } f(2) = -28.$$

Ti dve vrednosti sta označeni na grafu z modrima pikama.

(2) *Funkcijski vrednosti na robu območja sta*

$$f(-8) = -128 \text{ in } f(4) = 16.$$

Ti dve vrednosti sta označeni na grafu z oranžnima pikama.

(3) *Največja izmed zgoraj izračunanih funkcijskih vrednosti je tako* $f(-4) = 80$, *najmanjša pa* $f(-8) = -128$.

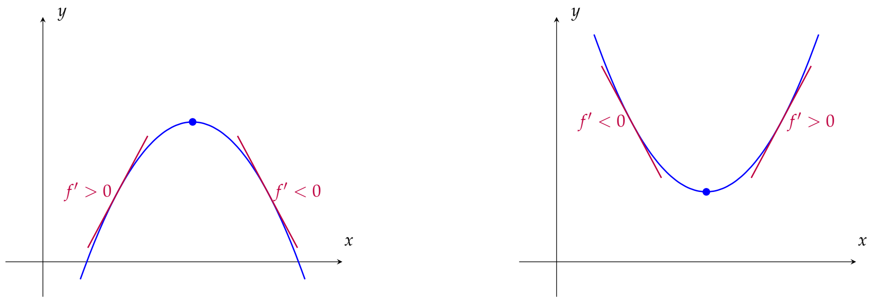
Sledi, da je največja vrednost funkcije f na intervalu $[-8, 4]$ *enaka* 80, *najmanjša pa* -128.

3.3.5. Klasifikacija lokalnih ekstremov funkcij. Pogosto želimo ugotoviti, kakšne vrste je stacionarna točka. Spomnimo se [30], da je vsak lokalni ekstrem tudi stacionarna točka. Zato nas bo zanimalo, ali v dani stacionarni točki funkcija zasede svoj lokalni maksimum, lokalni minimum ali nič od omenjenega.

Poglejmo si graf funkcije $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x$ iz primera 3.3.7. Izračunali smo stacionarni točki $x_1 = -4$ in $x_2 = 2$ in na grafu lahko vidimo razliko med njima. Levo od stacionarne točke $x_1 = -4$ funkcija narašča, desno pa pada. Za stacionarno točko $x_2 = 2$ pa velja ravno obratno, levo od nje funkcija pada, desno pa narašča. Zato je v -4 lokalni maksimum, v 2 pa lokalni minimum funkcije f.

Povsem podobno bi sklepali za stacionarne točke poljubne funkcije, tudi če nimamo narisanega njenega grafa. Namreč, če za stacionarno točko x_0 odvedljive funkcije velja, da za $x < x_0$ funkcija narašča, za $x > x_0$ pa funkcija pada, potem je v točki x_0 lokalni maksimum.

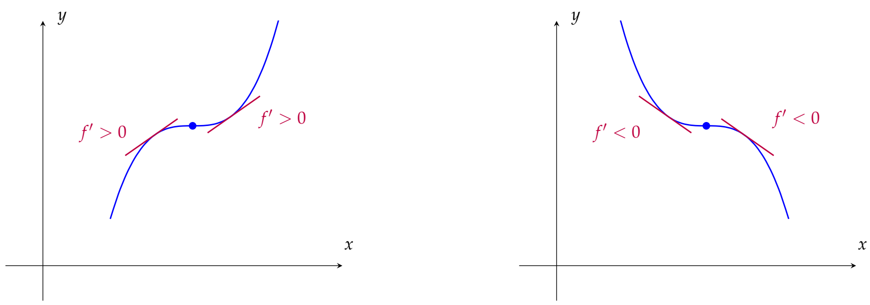
Podobno, če za stacionarno točko x_0 odvedljive funkcije velja, da za $x < x_0$ funkcija pada, za $x > x_0$ pa funkcija narašča, potem je v točki x_0 lokalni minimum.



V $\boxed{29}$ smo ugotovili, da naraščanje in padanje funkcij računsko najlažje določimo s pomočjo predznaka prvega odvoda funkcije. Torej sklepamo naslednje:

Naj bo x_0 stacionarna točka odvedljive funkcije f.

- Če se predznak f' v točki x_0 spremeni iz pozitivnega v negativnega, potem ima funkcija f v točki x_0 lokalni maksimum.
- Če se predznak f' v točki x_0 spremeni iz negativnega v pozitivnega, potem ima funkcija f v točki x_0 lokalni minimum.
- Če se predznak f' v točki x_0 ne spremeni, potem funkcija f v točki x_0 nima lokalnega ekstrema.

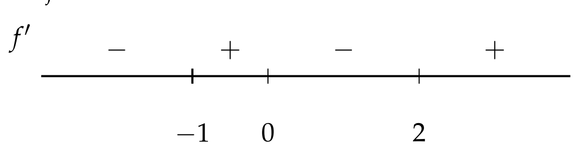


PRIMER 3.3.8. *Ugotovi, ali ima funkcija $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$ lokalne ekstreme in določi, kakšni so.*

REŠITEV: *Kot smo že izračunali v primeru 3.3.2, je odvod funkcije f enak*

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x-2)(x+1).$$

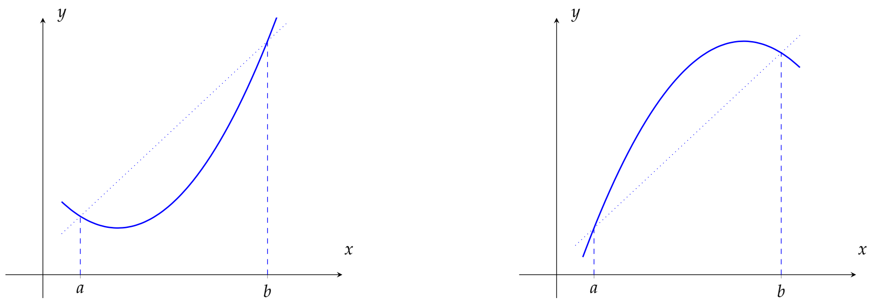
Ker je vsak lokalni ekstrem tudi stacionarna točka, iščemo lokalne ekstreme le med stacionarnimi točkami, ki so $x_1 = 2$, $x_2 = 0$ in $x_3 = -1$. V primeru 3.3.2 smo tudi ugotovili predznak funkcije f' na posameznih intervalih med njenimi ničlami.



Ker se v stacionarnih točkah -1 *in* 2 *predznak* f' *spremeni iz negativnega v pozitivnega, sta* -1 *in* 2 *lokalna minimuma funkcije* f. *Ker se v stacionarni točki* 0 *predznak* f' *spremeni iz pozitivnega v negativnega, je* 0 *lokalni maksimum funkcije* f.

3.3.6. Konkavnost in konveksnost funkcij. Tudi če dve funkciji obe naraščata, lahko naraščata precej različno. Z drugim odvodom bomo določili, kako se dana funkcija krivi.

Oglejmo si dva grafa funkcij na intervalu $[a, b]$.



konveksna funkcija   konkavna funkcija

Prva krivulja leži pod premico skozi točki $(a, f(a))$ in $(b, f(b))$ (ki jo imenujemo *sekanta* grafa), druga pa nad njo. Informacijo o takšni ukrivljenosti lahko določimo iz drugega odvoda.

> Funkcija je *konveksna* na intervalu $[a, b]$, če leži graf funkcije pod sekanto grafa skozi točki $(a_1, f(a_1))$ in $(b, f(b_1))$ na vsakem podintervalu $[a_1, b_1]$, $a \leq a_1 < b_1 \leq b$. Funkcija je *konkavna* na intervalu $[a, b]$, če leži graf funkcije nad sekanto grafa skozi točki $(a_1, f(a_1))$ in $(b, f(b_1))$ na vsakem podintervalu $[a_1, b_1]$, $a \leq a_1 < b_1 \leq b$.
> Točki, v kateri se krivulja spremeni iz konveksne v konkavno ali obratno, pravimo *prevoj*.

Če je na nekem intervalu (a, b) drugi odvod f'' pozitiven, je funkcija f' naraščajoča. To pomeni, da se naklon tangent na graf od točke a do točke b ves čas povečuje. Tak primer krivulje je narisan na zgornjem levem grafu. Podobno opazimo, da je desni graf čedalje bolj položen, dokler narašča, kar pomeni, da so tudi tangente vse manj strme. Zato je f' padajoča funkcija in posledično velja $f'' < 0$. Sedaj lahko preprosto ugotovimo, ali je funkcija konveksna ali konkavna na nekem intervalu.

> Za dvakrat odvedljivo funkcijo $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ velja:
> - če je $f''(x) > 0$ za vse $x \in (a, b)$, je f konveksna na (a, b),
> - če je $f''(x) < 0$ za vse $x \in (a, b)$, je f konkavna na (a, b).

PRIMER 3.3.9. *Določi območja konveksnosti in konkavnosti funkcije* $f(x) = \frac{\log x}{\sqrt{x}}$.

REŠITEV: *Najprej opazimo, da je* $\mathcal{D}_f = (0, \infty)$. *Za določitev konveksnosti potrebujemo drugi odvod funkcije. Odvajajmo torej po pravilu za odvajanje kvocienta* 21:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot \sqrt{x} - \log x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2 - \log x}{2x^{\frac{3}{2}}}$$

in še enkrat

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x} \cdot 2x^{\frac{3}{2}} - (2 - \log x) \cdot 3x^{\frac{1}{2}}}{4x^3} = \frac{-8 + 3\log x}{x^{\frac{5}{2}}}.$$

Imenovalec je vedno pozitivno število. Zato je funkcija konveksna natanko tedaj, ko je števec $-8 + 3\log x$ *pozitivno število, torej, ko je* $\log x > \frac{8}{3}$*. Ker je logaritem naraščajoča funkcija, je ta pogoj ekvivalenten pogoju, da je* $x > e^{\frac{8}{3}}$*. Torej je funkcija konveksna za* $x \in \left(e^{\frac{8}{3}}, \infty\right)$ *in konkavna za* $x \in \left(0, e^{\frac{8}{3}}\right)$.

Sedaj, ko vemo, kaj nam drugi odvod funkcije pove o tem, kako se graf funkcije v dani točki krivi, lahko tudi s pomočjo drugega odvoda ugotovimo, kakšna je stacionarna točka. Namreč, če je v stacionarni točki funkcija konveksna, potem je v tej točki lokalni minimum. Če je v stacionarni točki funkcija konkavna, potem ima v tej točki lokalni maksimum. Tako smo dobili naslednjo klasifikacijo stacionarnih točk.

Naj bo $x_0 \in \mathcal{D}_f$ stacionarna točka dvakrat odvedljive funkcije f. Funkcija f ima v točki x_0 31

- lokalni minimum, če je $f''(x_0) > 0$ in
- lokalni maksimum, če je $f''(x) < 0$.

V primeru, ko je x_0 stacionarna točka in je vrednost drugega odvoda enaka 0, potrebujemo vrednosti višjih odvodov v točki x_0, da ugotovimo, kakšna je stacionarna točka.

PRIMER 3.3.10. *Določi lokalne ekstreme funkcije* $f(x) = \frac{\log x}{\sqrt{x}}$.

REŠITEV: *Za določitev lokalnih ekstremov najprej potrebujemo stacionarne točke, torej ničle odvoda*

$$f'(x) = \frac{2 - \log x}{2x^{\frac{3}{2}}}$$

(ki smo ga izračunali že v primeru 3.3.9). Stacionarna točka je torej točka x_0*, v kateri velja* $2 - \log x = 0$*, oziroma* $x_0 = e^2$.

Namesto, da bi ugotovili, ali in kako se spremeni predznak prvega odvoda v stacionarni točki, lahko testiramo le predznak drugega odvoda $f''(x) = \frac{-8+3\log x}{x^{\frac{5}{2}}}$ *v stacionarni točki* $x_0 = e^2$*. Ker je*

$$f''(e^2) = \frac{-8 + 3\log e^2}{(e^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{-8 + 6}{e^5} = -2e^{-5} < 0,$$

je po 31 *v točki* $x_0 = e^2$ *lokalni maksimum.*

3.3.7. L'Hospitalovo pravilo. Pogosto imamo opravka z nedefiniranim izrazom v obliki ulomka. Na primer, ko računamo limito kvocienta, kjer se tako števec kot imenovalec v limiti oba približujeta 0. V tem primeru ne moremo uporabiti pravila 11, saj je limita imenovalca enaka 0. Še vedno pa lahko limita kvocienta obstaja. Eden izmed priročnih načinov, kako jo izračunamo, je l'Hospitalovo pravilo. Če sta tako števec kot imenovalec odvedljivi funkciji, potem velja naslednji izrek.

Naj bosta f in g odvedljivi funkciji in naj bo $g'(x) \neq 0$ na nekem odprtem intervalu okoli a (razen morda v a). Če velja

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0,$$

potem je

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

32

Dokaz l'Hospitalovega pravila ni enostaven, zato ga bomo tu opustili. Namesto njega si oglejmo nekaj zgledov njegove uporabe.

PRIMER 3.3.11. *Izračunaj limito* $\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x^2-1}$.

REŠITEV: *Tako števec kot imenovalec ulomka* $\frac{\log x}{x^2-1}$ *sta odvedljivi funkciji in* $\lim_{x\to 1} \log x = \lim_{x\to 1} (x^2-1) = 0$. *Uporabimo l'Hospitalovo pravilo* 32, *ki pravi, da je*

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(\log x)'}{(x^2-1)'} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \frac{1}{2}.$$

Spomnimo se, da smo v primeru 2.2.9 geometrijsko pokazali, da je $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Naredimo to sedaj še s pomočjo l'Hospitalovega pravila 32.

PRIMER 3.3.12. *Izračunaj limito* $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$.

REŠITEV: *Tako števec kot imenovalec ulomka* $\frac{\sin x}{x}$ *sta odvedljivi funkciji. Poleg tega je* $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$ *in* $\lim_{x\to 0} x = 0$, *zato lahko uporabimo l'Hospitalovo pravilo* 32. *To pravi, da je*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1.$$

Podobno kot 32 velja l'Hospitalovo pravilo tudi, ko tako števec kot imenovalec narašča preko vseh meja.

Naj bosta f in g odvedljivi funkciji in naj bo $g'(x) \neq 0$ na nekem odprtem intervalu okoli a (razen morda v a). Če velja

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty,$$

potem je

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

33

Obe pravili $\boxed{32}$ in $\boxed{33}$ veljata tudi za enostranski limiti ter tudi ko gre $x \to \pm\infty$.

PRIMER 3.3.13. *Izračunaj* $\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}}$.

REŠITEV: *Zopet moramo najprej preveriti, da so izpolnjeni pogoji za uporabo l'Hospitalovega pravila. Tako števec* $\log x$ *kot imenovalec* $\sqrt{x}$ *sta odvedljivi funkciji in velja* $\lim_{x\to\infty} \log x = \infty$ *ter* $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x} = \infty$. *Zato je po* $\boxed{33}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\log x)'}{(\sqrt{x})'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0.$$

V obeh l'Hospitalovih pravih pa moramo posebej paziti, da ju ne uporabljamo, če predpostavke niso izpolnjene. Vedno se namreč morata tako števec kot imenovalec oba približevati 0 ali pa oba približevati $\pm\infty$.

3.3.8. Risanje grafov. Vse znanje o funkcijah in njihovih odvodih lahko uporabimo za natančnejše risanje grafov funkcij. Za izris grafa funkcije $f\colon \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ lahko upoštevamo naslednje:

(1) Določimo definicijsko območje $\mathcal{D}_f$, ničle ter obnašanje funkcije na robu definicijskega območja.
(2) Izračunamo odvod f'. Ničle odvoda nam določajo stacionarne točke, predznak pa območja naraščanja in padanja.
(3) Izračunamo drugi odvod f''. Predznak f'' nam pove, kje je funkcija f konveksna in kje konkavna.

PRIMER 3.3.14. *Narišimo graf funkcije* $f(x) = \frac{\log x}{\sqrt{x}}$.

REŠITEV: *Definicijsko območje funkcije* f *so vsa pozitivna števila, saj za nepozitivna števila* x *ne moremo izračunati vrednosti* $\log x$. *Torej je* $\mathcal{D}_f = (0, \infty)$.

Funkcija f *ima ničlo v točki* x, *kjer je* $\log x = 0$ *oziroma ekvivalentno, ko je* $x = 1$.

Kako se funkcija f *obnaša na robu svojega definicjskega območja? Ko gre* $x \to \infty$, *je* $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, *kot smo izračunali v primeru 3.3.13. Ko gre* $x \searrow 0$, *gre števec proti* $-\infty$, *imenovalec pa je pozitiven in gre proti 0. Zato je* $\lim_{x\searrow 0} f(x) = -\infty$.

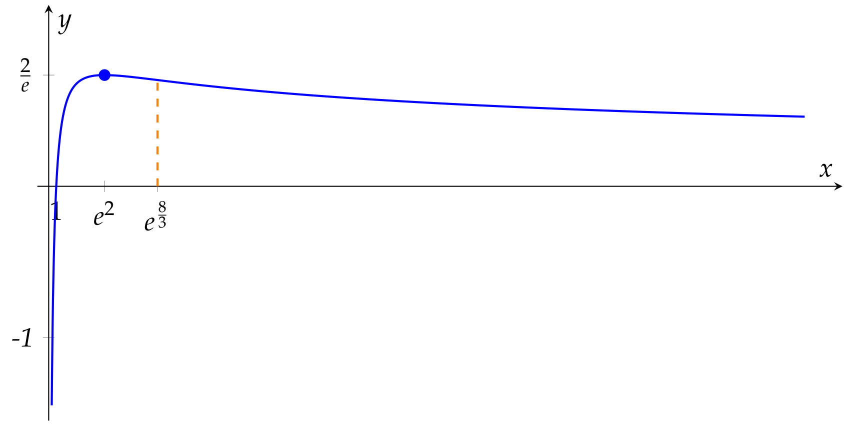
Iz primera 3.3.10 vemo, da je

$$f'(x) = \frac{2 - \log x}{2x^{\frac{3}{2}}}$$

ter da ima funkcija f *lokalni maksimum v* $x_0 = e^2$, *torej v točki* $(e^2, \frac{2}{e})$. *Imenovalec odvoda je vedno pozitiven, zato je* $f'(x) > 0$ *natanko tedaj, ko je* $2 - \log x > 0$. *Ekvivalentno je* $\log x < 2$, *oziroma* $x < e^2$. *Sledi, da funkcija narašča na intervalu* $(0, e^2)$ *in pada na* (e^2, ∞).

V primeru 3.3.9 smo izračunali, da je f *konkavna na intervalu* $(0, e^{\frac{8}{3}})$ *in konveksna na intervalu* $(e^{\frac{8}{3}}, \infty)$. *Zatorej se pri* $x = e^{\frac{8}{3}}$ *krivulja spremeni iz konveksne v konkavno.*

S temi podatki lahko sedaj narišemo graf funkcije f.


y
2/e
x
1
e^2
e^(8/3)
-1

POGLAVJE 4

Integral

V Poglavju 3 smo s pomočjo limite definirali odvod funkcije in predstavili njegovo široko uporabo za raziskovanje lastnosti funkcij. V tem poglavju bomo spoznali nov pojem, to je *integral*. Natančneje, spoznali bomo dve vrsti integralov. Iskanje nedoločenega integrala je obratni postopek kot odvajanje, nedoločeni integral dane funkcije f bomo namreč definirali kot funkcijo, katere odvod je enak f. Določeni integral pa bomo definirali geometrijsko, kot ploščino območja pod krivuljo. Torej je nedoločeni integral funkcije funkcija, določeni integral funkcije pa število. Kljub navidezni nepovezanosti pojmov bomo predstavili zvezo med njima ter primere uporabe.

4.1. Nedoločeni integral

4.1.1. Definicija in osnovne lastnosti. Za dano funkcijo $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, kjer je $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$ odprt interval, bi radi našli neko funkcijo F, katere odvod je f.

Če za funkcijo $F\colon \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ velja
$$F'(x) = f(x)$$
za vse x iz definicijskega območja $\mathcal{D}_f$ funkcije f, potem funkcijo F imenujemo *nedoločeni integral* funkcije f. Pišemo:
$$F(x) = \int f(x)\, dx.$$

Pri tem nam simbol diferenciala dx na koncu integrala pove, da integriramo funkcijo f po spremenljivki x.

Nedoločeni integral je torej obratna operacija k operaciji odvajanja funkcij. Če je funkcija f odvod funkcije F, potem je F nedoločeni integral funkcije f. Na primer, ker je $(x^3)' = 3x^2$, pišemo
$$x^3 = \int 3x^2\, dx.$$
Hkrati velja tudi $(x^3+2)' = 3x^2$, zato je tudi
$$x^3 + 2 = \int 3x^2\, dx.$$

Velja tudi v splošnem: če je $F'(x) = f(x)$, potem je tudi $(F(x)+C)' = F'(x) = f(x)$ za vse konstante $C \in \mathbb{R}$. Zato nedoločeni integral ni enolično definirana funkcija.

Če sta F in G oba nedoločena integrala funkcije f, potem nas zanima, v kakšni zvezi sta. Če je $F' = G' = f$, potem je $(F-G)' = F' - G' = 0$. Funkcija $F-G$ je torej funkcija, katere odvod je v vsaki točki enak 0, oziroma povedano drugače, v vsaki točki je tangenta na graf vodoravna. Zatorej ni težko verjeti, da je $F - G$ konstantna funkcija.

> Če je F nedoločeni integral funkcije f, potem je vsak nedoločeni integral G funkcije f enak
> $$G(x) = F(x) + C$$
> za neko konstanto $C \in \mathbb{R}$.

34

Spomnimo se, da smo v razdelku 3.2 poračunali odvode elementarnih funkcij. Ker po 22 velja $\left(x^{\alpha+1}\right)' = (\alpha+1)x^{\alpha}$ za vsako realno število α, je tudi

$$\left(\frac{1}{\alpha+1}\, x^{\alpha+1}\right)' = x^{\alpha},$$

če je le $\alpha \neq -1$. Po definiciji nedoločenega integrala velja

> $$\int x^{\alpha}\, dx = \frac{1}{\alpha+1}\, x^{\alpha+1} + C,$$

35

kjer je $C \in \mathbb{R}$ ter $\alpha \neq -1$ poljubno realno število.

Če je $\alpha = -1$, nas še zanima, koliko je $\int x^{-1}\, dx = \int \frac{1}{x}\, dx$. Če je $x > 0$, potem po 27 velja $(\log x)' = \frac{1}{x}$. Če je $x < 0$, potem je $(\log(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$. Zato za vsak neničeln $x \in \mathbb{R}$ velja $(\log |x|)' = \frac{1}{x}$ in tako sledi

> $$\int \frac{1}{x}\, dx = \log |x| + C.$$

36

Če ostala pravila za računanje odvodov iz razdelka 3.2 preberemo drugače, lahko zapišemo naslednjo tabelo elementarnih integralov:

> $$\begin{aligned}
> \int e^{x}\, dx &= e^{x} + C \\
> \int \cos x\, dx &= \sin x + C \\
> \int \sin x\, dx &= -\cos x + C \\
> \int \frac{dx}{\cos^2 x} &= \tan x + C \\
> \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \arcsin x + C \\
> \int \frac{dx}{1+x^2} &= \arctan x + C
> \end{aligned}$$

4.1.2. Pravila za računanje nedoločenih integralov. Če za dano funkcijo f poznamo njen nedoločeni integral F, potem po 20 velja

$$(\alpha F(x))' = \alpha F'(x) = \alpha f(x)$$

za poljuben $\alpha \in \mathbb{R}$. To pomeni, da je

$$\boxed{\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx} \tag{37}$$

za vsak $\alpha \in \mathbb{R}$.

Naj bosta sedaj f in g dve funkciji in F ter G njuna nedoločena integrala. Ker po 18 vemo, da je odvod vsote dveh funkcij vsota odvodov, sledi

$$(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x).$$

Torej velja

$$\boxed{\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.} \tag{38}$$

PRIMER 4.1.1. *Izračunaj integral* $\int \left(x - \frac{1}{x^2}\right)^2 dx$.

REŠITEV: *Najprej preoblikujmo funkcijo pod integralom v* $\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^2 = x^2 - 2\frac{1}{x} + \frac{1}{x^4}$. *Sedaj upoštevajmo pravili 38 in 37 ter nato s pomočjo formul 35 in 36 integrirajmo dano funkcijo:*

$$\begin{aligned}
\int \left(x - \frac{1}{x^2}\right)^2 dx &= \int \left(x^2 - 2\frac{1}{x} + \frac{1}{x^4}\right) dx = \\
&= \int x^2\,dx - \int 2\frac{1}{x}\,dx + \int \frac{1}{x^4}\,dx = \\
&= \int x^2\,dx - 2\int \frac{1}{x}\,dx + \int x^{-4}\,dx = \\
&= \frac{x^3}{3} + C_1 - 2\log|x| + C_2 + \frac{x^{-3}}{-3} + C_3 = \\
&= \frac{1}{3}(x^3 - \frac{1}{x^3}) - 2\log|x| + C.
\end{aligned}$$

Pri tem smo upoštevali, da namesto vsote treh konstant C_1, C_2 in C_3, ki bi jih pridobili pri vsakem integralu posebej, lahko zapišemo kar njihovo vsoto C.

Velikokrat bomo v integral želeli vpeljati novo spremenljivko. Na primer, oglejmo si integral

$$\int x e^{x^2}\,dx,$$

ki ga ne moremo izračunati po nobeni doslej znani formuli. Radi bi vpeljali novo spremenljivko $t = x^2$. Diferencial na koncu integrala je diferencial neodvisne spremenljivke x. Po definiciji (5) je diferencial spremenljivke t enak $dt = 2x\,dx$. V integralu moramo zamenjati tako spremenljivko x kot diferencial dx za drugo spremenljivko t in njen diferencial dt. S tem dobimo

$$\int xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}2x\,dx = \frac{1}{2}\int e^t\,dt = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C \tag{6}$$

Pravimo, da smo v integral uvedli novo spremenljivko in v splošnem to naredimo po naslednjem pravilu:

$$\int f(t(x))t'(x)\,dx = \int f(t)\,dt.$$ 39

PRIMER 4.1.2. *Izračunaj integral* $\int \frac{\sin x}{2+\cos x}\,dx$.

REŠITEV: *Za novo spremenljivko bi radi uvedli izraz v imenovalcu* $t = 2+\cos x$. *S tem dobimo diferencial* $dt = \sin x\ dx$. *Ko vpeljemo takšno zamenjavo spremenljivke v integral, po* 39 *in* 36 *dobimo*

$$\int \frac{\sin x}{2+\cos x}\,dx = \int \frac{1}{t}\,dt = \log|t| + C = \log|2+\cos x| + C = \log(2+\cos x) + C.$$

PRIMER 4.1.3. *Izračunaj integral* $\int \sqrt{5x-1}\,dx$.

REŠITEV: *Najprej vpeljemo novo spremenljivko* $t = 5x-1$. *Zato je* $dt = 5\,dx$ *in tako po* 37 *in* 35 *sledi*

$$\int \sqrt{5x-1}\,dx = \int \frac{\sqrt{t}}{5}\,dt = \frac{1}{5}\int t^{\frac{1}{2}}\,dt = \frac{1}{5}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{15}\sqrt{(5x-1)^3} + C.$$

PRIMER 4.1.4. *Izračunaj integral* $\int \cos^3 x \sin^2 x\,dx$.

REŠITEV: *Če bomo uvedli eno od trigonometričnih funkcij* $\sin x$ *ali* $\cos x$ *za novo spremenljivko, se nam bo druga pojavila v diferencialu. Zato žrtvujemo en faktor* $\cos x$, *ki se pojavlja v lihi potenci, za zamenjavo spremenljivke v diferencialu, preostali del* $\cos^2 x$ *pa prevedemo na* $1-\sin^2 x$. *Zatorej naj bo* $t = \sin x$ *in tako sledi* $dt = \cos x\,dx$ *ter*

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x \sin^2 x\,dx &= \int (1-\sin^2 x)\sin^2 x \cos x\,dx = \\ &= \int (1-t^2)t^2\,dt = \int (t^2 - t^4)\,dt = \\ &= \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \\ &= \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C.\end{aligned}$$

PRIMER 4.1.5. *Izračunaj integral* $\int \sin^2 x \, dx$.

REŠITEV: *Če se trigonometrične funkcije pojavljajo v integralu v sodih potencah, ne moremo uporabiti takšne substitucije kot v primeru 4.1.4. Zato najprej prevedemo* $\sin^2 x$ *s pomočjo formule za dvojne kote (stran 165) na*

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}.$$

S tem dobimo

$$\int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int \, dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx. \tag{7}$$

Sedaj v drugem integralu uvedemo novo spremenljivko $t = 2x$. *Zato je* $dt = 2 \, dx$ *in tako nadaljujemo enakost* (7) *do*

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int \, dx - \frac{1}{4} \int \cos t \, dt = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin t + C = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

PRIMER 4.1.6. *Izračunaj integral* $\int \frac{dx}{x(x-1)}$.

REŠITEV: *S pomočjo pravila* 35 *ter uvedbe nove spremenljivke znamo izračunati integrala* $\int \frac{dx}{x}$ *in* $\int \frac{dx}{x-1}$. *Poznamo tudi način, kako iz ulomka* $\frac{1}{x(x-1)}$ *pridobimo vsoto ulomkov, v katerih sta imenovalca* x *in* $x - 1$. *To naredimo tako, da poračunamo ustrezna števca* A *in* B *v enakosti*

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1}.$$

Če preoblikujemo desno stran, velja torej

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{A(x-1) + Bx}{x(x-1)} = \frac{x(A+B) - A}{x(x-1)}.$$

Ulomka na levi in desni morata biti enaka za vsak x, *zato je* $A + B = 0$ *ter* $A = -1$. *Sledi, da je* $B = 1$, *oziroma*

$$\frac{1}{x(x-1)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}.$$

Sedaj lahko po pravilih 38 *in* 37 *zapišemo*

$$\int \frac{dx}{x(x-1)} = -\int \frac{1}{x} \, dx + \int \frac{1}{x-1} \, dx. \tag{8}$$

Drugi integral z vpeljavo nove spremenljivke $t = x - 1$, $dt = dx$, *in s pravilom* 36 *izračunamo kot*

$$\int \frac{1}{x-1} \, dx = \int \frac{1}{t} \, dt = \log |t| + C_1 = \log |x - 1| + C_1.$$

Sedaj lahko nadaljujemo (8) *in dobimo*

$$\int \frac{dx}{x(x-1)} = -\int \frac{1}{x} \, dx + \int \frac{1}{x-1} \, dx = -\log |x| + \log |x - 1| + C = \log \left| \frac{x-1}{x} \right| + C.$$

Pravili za odvajanje in integriranje vsot funkcij sta preprosti. Pri odvajanju in integraciji produkta funkcij pa moramo biti bolj pazljivi. Spomnimo se formule 19, ki pravi, da je odvod produkta dveh funkcij enak

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

To pomeni, da je $u(x)v'(x) = (u(x)v(x))' - u'(x)v(x)$, oziroma

$$\int u(x)v'(x)\,dx = \int ((u(x)v(x))' - u'(x)v(x))\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx.$$

To pravilo si lahko zapomnimo na naslednji način. V integralu imamo produkt dveh funkcij, od katerih eno funkcijo znamo odvajati, drugo funkcijo pa znamo integrirati. Če njunega produkta ne znamo integrirati (integral na levi), znamo pa integrirati produkt odvoda prve funkcije in integrala druge funkcije (integral na skrajni desni), potem uporabimo formulo

$$\boxed{\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx,}$$

ki jo imenujemo *integriranje po delih* ali s tujko *integriranje per partes*. S pomočjo diferencialov lahko zapišemo to formulo tudi kot

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du.} \tag{40}$$

PRIMER 4.1.7. *Izračunaj integral* $\int xe^{2x}\,dx$.

REŠITEV: *Če želimo integrirati po delih, moramo produkt* $xe^{2x}\,dx$ *razbiti na dva dela. Prvi izbiri bi bili verjetno* $u = x$ *in* $dv = e^{2x}\,dx$ *ali pa* $u = e^{2x}$ *in* $dv = x\,dx$. *Po uporabi formule za integracijo po delih* 40 *bomo morali integrirati* $\int v\,du$ *namesto* $\int u\,dv$. *Zato se najprej vprašajmo, katera od obeh izbir bo boljša za kasnejše integriranje. V prvi izbiri bo* $du = dx$ *in* $v = \int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}$, *torej bomo po uporabi* 40 *dobili integral* $\frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx$, *ki ga znamo izračunati. V drugem primeru je* $du = 2e^{2x}\,dx$ *in* $v = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}$, *zato bomo po uporabi* 40 *dobili integral* $\int x^2e^{2x}\,dx$, *ki je težje izračunljiv kot prvotni integral* $\int xe^{2x}\,dx$.

Zato izberemo $u = x$ *in* $dv = e^{2x}\,dx$. *Z odvajanjem dobimo* $du = dx$. *Ker lahko za* v *izberemo katerikoli nedoločeni integral* dv, *pišemo* $v = \int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}$. *Po formuli* 40 *sledi*

$$\int xe^{2x}\,dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C.$$

PRIMER 4.1.8. *Izračunaj integral* $\int \log x\,dx$.

REŠITEV: *Izberimo* $u = \log x$ *in* $dv = dx$. *Potem je* $du = \frac{1}{x}\,dx$ *ter* $v = \int dx = x$. *Z uporabo integracije po delih* $\boxed{40}$ *dobimo*

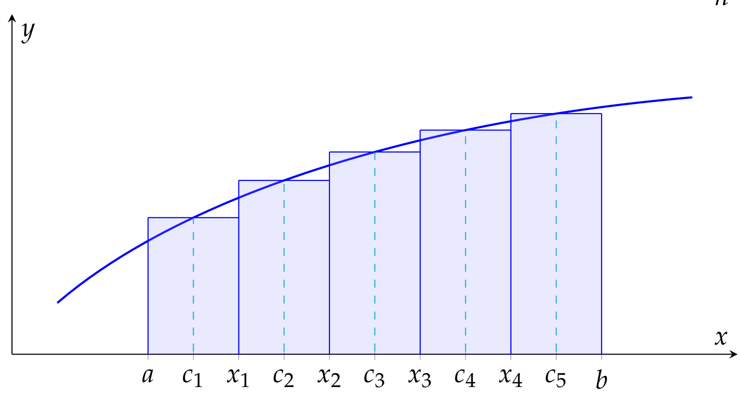
$$\int \log x\,dx = x\log x - \int \frac{1}{x}\cdot x\,dx = x\log x - \int dx = x\log x - x + C.$$

4.2. Določeni integral

4.2.1. Definicija. Ni vedno lahko izračunati ploščine pod krivuljo na intervalu $[a,b]$. Lahko pa izračunamo njen približek na več načinov. Ena izmed možnosti je, da interval $[a,b]$ razdelimo na n delov, ki jih delijo točke

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b,$$

pri tem pa so vsi intervali $[x_{k-1}, x_k]$, kjer je $k = 1, 2, \ldots, n$, iste širine $\delta_n = \dfrac{b-a}{n}$.

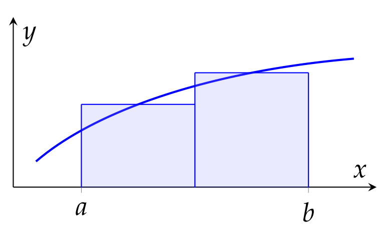


Naj bo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ pozitivna funkcija. Za vsak $k = 1, 2, \ldots, n$ izberimo neko točko c_k na intervalu $[x_{k-1}, x_k]$ in nad intervalom $[x_{k-1}, x_k]$ narišimo pravokotnik višine $f(c_k)$. Ploščina pravokotnika nad intervalom $[x_{k-1}, x_k]$ je enaka $(x_k - x_{k-1})f(c_k) = f(c_k)\delta_n$. Vsota vseh ploščin pravokotnikov nad posameznimi intervali je tako enaka

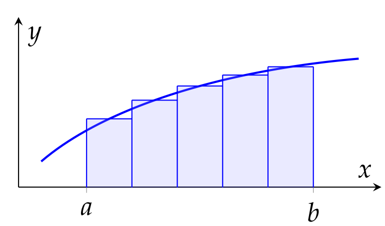
$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\delta_n. \tag{9}$$

Ta vsota nam določa približek ploščine pod grafom funkcije $y = f(x)$ na intervalu $[a,b]$.

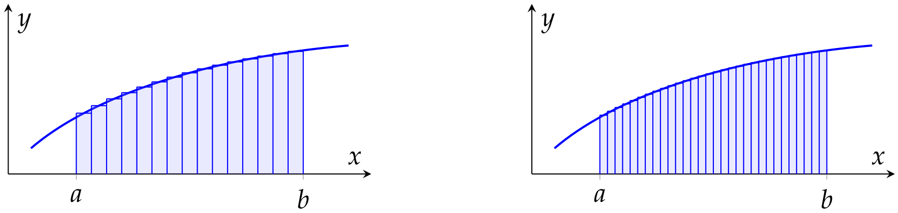
Z večanjem števila n nam interval $[a,b]$ razpade na več podintervalov in tako je stolpičast lik čedalje bolj podoben območju pod grafom funkcije na intervalu $[a,b]$.



$n = 2$



$n = 5$



$n = 15$ $n = 30$

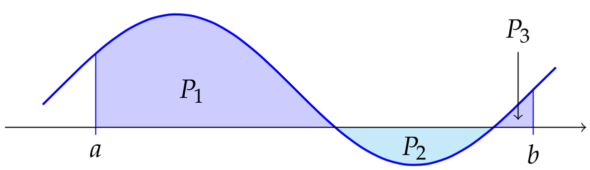
Zato ni težko verjeti, da v limiti, ko gre $n \to \infty$, zaporedje vsot (9) konvergira k ploščini lika pod grafom funkcije $y = f(x)$ na intervalu $[a, b]$.

Določeni integral $\int_a^b f(x)\,dx$ pozitivne funkcije f na intervalu $[a, b]$ je ploščina območja med x-osjo in grafom funkcije $y = f(x)$ na intervalu $[a, b]$, torej

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\delta_n,$$

če ta limita obstaja.
Če določeni integral funkcije f na intervalu $[a, b]$ obstaja, pravimo, da je funkcija *integrabilna*.

Če f ni nujno pozitivna funkcija, so pri negativnih vrednostih funkcije f višine stolpcev $f(c_k)$ negativne. Zato se nam ploščine stolpcev tam prištevajo z negativnim predznakom. Posledično to pomeni, da je za poljubno zvezno funkcijo f določeni integral funkcije f na intervalu $[a, b]$ enak razliki ploščin, ki jih določa graf funkcije f nad in pod abscisno osjo. Kjer je f pozitivna, prištejemo ploščino s pozitivnim predznakom, kjer je negativna, pa z negativnim.



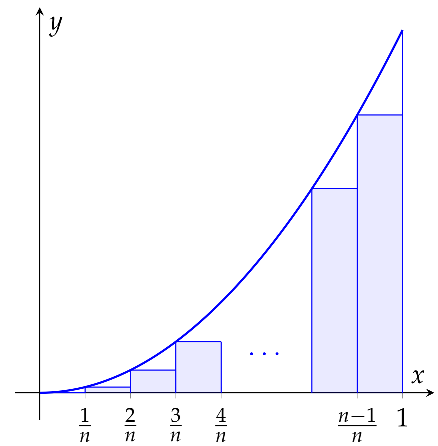
$$\int_a^b f(x)\,dx = P_1 - P_2 + P_3$$

Izkaže se, da je vsaka zvezna funkcija $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabilna, česar pa ne bomo dokazovali.

Če je f zvezna funkcija na intervalu $[a, b]$, potem obstaja $\int_a^b f(x)\,dx$. 41

Vse elementarne funkcije so integrabilne na poljubnem zaprtem intervalu $[a, b]$. Niso pa vse funkcije integrabilne.

PRIMER 4.2.1. *Po definiciji izračunaj določeni integral funkcije $f(x) = x^2$ na intervalu $[0, 1]$.*



REŠITEV: *Razdelimo interval $[0,1]$ na n enakih delov, kar pomeni, da izberemo za krajišča podintervalov točke*

$$0,\ \frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \frac{3}{n},\ldots,\frac{n-1}{n},\ 1.$$

Vsak interval je tako širine $\delta_n = \frac{1}{n}$. Na vsakem intervalu $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ moramo izbrati neko točko c_k. Izberimo za c_k kar spodnjo mejo intervala $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$, torej $c_k = \frac{k-1}{n}$ za $k = 1, 2, \ldots, n$.

Tako je $f(c_k) = \frac{(k-1)^2}{n^2}$ in zato je integralska vsota (9) enaka

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\left(0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots (n-1)^2\right)$$

S pomočjo popolne indukcije bi lahko pokazali, da je vsota popolnih kvadratov naravnih števil enaka

$$0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + m^2 = \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1).$$

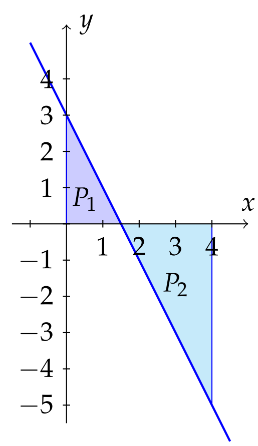
Integralska vsota je tako enaka

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}$$

in zato je določeni integral enak

$$\int_0^1 x^2\, dx = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6n^3} = \frac{1}{3}.$$

PRIMER 4.2.2. *Izračunaj $\int_0^4 (3-2x)\, dx$.*



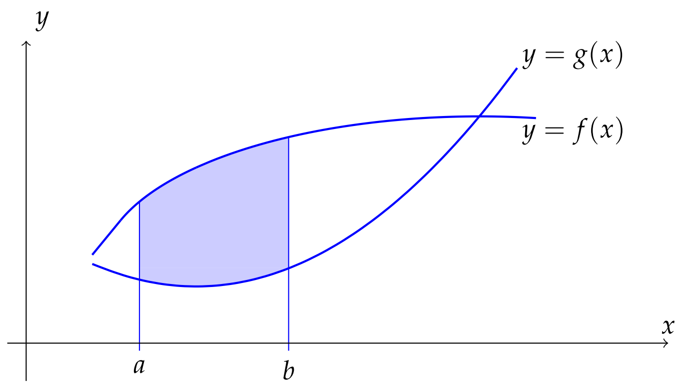
REŠITEV: *V primeru, ko želimo integrirati linearno funkcijo, nam ni potrebno računati integralskih vsot, saj so vse ploščine likov, ki jih želimo določiti, ploščine trikotnikov. Če narišemo graf funkcije $y = 3 - 2x$, opazimo, da je*

$$\int_0^4 (3-2x)\, dx = P_1 - P_2.$$

Trikotnik s ploščino P_1 je pravokotni trikotnik s katetama dolžin $\frac{3}{2}$ in 3, trikotnik s ploščino P_2 pa je pravokotni trikotnik s katetama dolžin $\frac{5}{2}$ in 5. Zato velja

$$\int_0^4 (3-2x)\, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot 5 = -4.$$

Če želimo določiti ploščino med dvema grafoma funkcij $y = f(x)$ in $y = g(x)$, moramo odšteti ploščini pod krivuljama $y = f(x)$ in $y = g(x)$.



Če za funkciji f in g velja $f(x) \geq g(x)$ za vse $x \in [a, b]$, potem je ploščina med grafoma $y = f(x)$ in $y = g(x)$ enaka

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx.$$

42

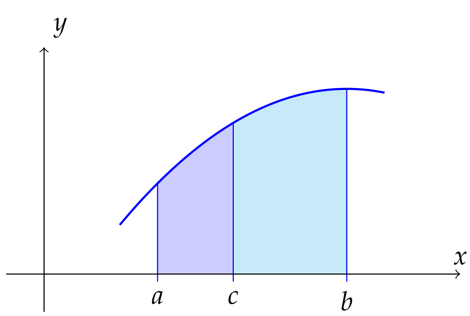
4.2.2. Lastnosti določenega integrala. Doslej smo predpostavili, da za integrabilno funkcijo $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ velja $a \leq b$. Definicija določenega integrala bi imela smisel, tudi če bi zamenjali vlogi spodnje in zgornje meje. S tem bi se vsota (9) negativno predznačila in tako bi dobili enakost

$$\int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx.$$

V primeru, ko sta spodnja in zgornja meja intervala enaki, je ploščina enaka 0, zato velja

$$\int_a^a f(x)\, dx = 0.$$

Če med spodnjo in zgornjo mejo a in b izberemo točko c, je ploščina pod krivuljo na intervalu $[a, b]$ enaka vsoti ploščin na intervalih $[a, c]$ in $[c, b]$.



To pomeni, da velja

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \tag{43}$$

za vse $c \in [a,b]$.

Ker je limita vsote enaka vsoti limit $\boxed{9}$ in limita večkratnika funkcije enaka večkratniku limite $\boxed{8}$, sledi

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \tag{44}$$

in

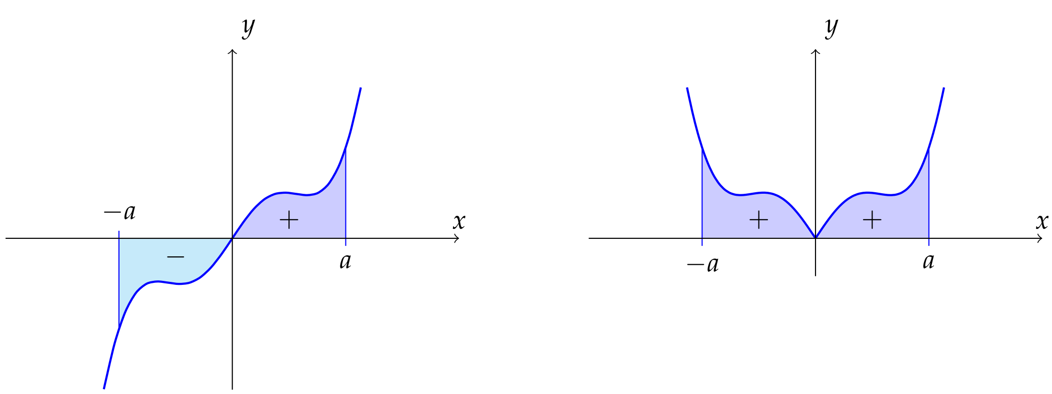
$$\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx. \tag{45}$$

V posebnem, če je f liha funkcija na intervalu $[-a,a]$, po pravilih $\boxed{43}$ in $\boxed{45}$ sledi

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

Če pa je f soda funkcija, po $\boxed{43}$ velja

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$$



liha funkcija soda funkcija

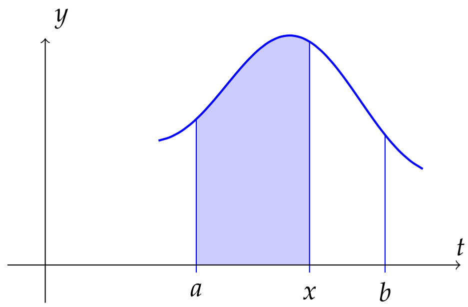
Če za funkciji f in g na intervalu $[a,b]$ velja $f(x) \le g(x)$, ima funkcija $g-f$ za vsak $x \in [a,b]$ nenegativno vrednost. Zato je njen določeni integral na intervalu $[a,b]$ po definiciji nenegativno število. Po $\boxed{44}$ in $\boxed{45}$ velja

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$$

4.2.3. Zveza med določenim in nedoločenim integralom. Naj bo $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Ker je zvezna na vsakem podintervalu $[a,x]$, kjer je $a \le x \le b$, je po $\boxed{41}$ tam tudi integrabilna. Zato za vsak $x \in [a,b]$ obstaja integral

$$\int_a^x f(t)\,dt.$$

Ta določeni integral predstavlja ploščino pod grafom funkcije $y = f(t)$ na intervalu $[a,x]$.



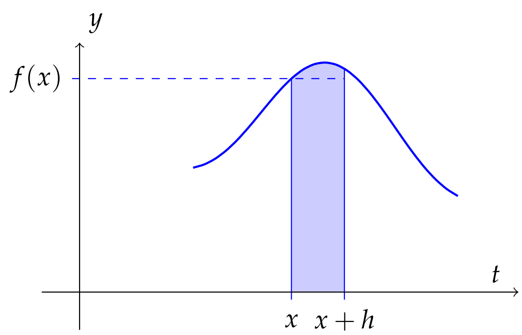
S spreminjanjem zgornje meje x se spreminja tudi krivočrtni lik in posledično vrednost ploščine lika $\int_a^x f(t)\,dt$. Zato definirajmo funkcijo

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Funkcija F je definirana za števila $x \in [a,b]$ in velja $F(a) = 0$. Poskušajmo razumeti, kaj je odvod funkcije F. Po definiciji odvoda je

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right) = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt. \end{aligned}$$

Integral $\int_x^{x+h} f(t)\,dt$ je enak ploščini lika pod krivuljo $y = f(t)$ na intervalu $[x, x+h]$.



Ta ploščina je približno enaka ploščini pravokotnega stolpca višine $f(x)$ nad intervalom $[x, x+h]$, torej približno enaka vrednosti $hf(x)$. Zato je $F'(x)$ približno $f(x)$. Ker gre v limiti $h \to 0$, je z manjšanjem širine pravokotnika h napaka čedalje manjša.

Izkaže se, da je $F'(x)$ dejansko enak $f(x)$ za vse $x \in [a,b]$. Velja namreč naslednja pomembna trditev, ki jo imenujemo tudi Osnovni izrek integralskega računa.

Če je f zvezna na $[a,b]$, je funkcija

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

zvezna in odvedljiva na $[a,b]$ in velja

$$F'(x) = f(x).$$

46

Funkcija F je torej nedoločeni integral funkcije f na intervalu $[a,b]$.

S tem izrekom lahko definiramo celo družino zveznih in odvedljivih funkcij, ki jih prej nismo poznali. Vemo, da je vsaka elementarna funkcija odvedljiva. Vendar pa ni integral vsake elementarne funkcije elementarna funkcija. Na primer, nedoločeni integral funkcije e^{-t^2} ni elementarna funkcija. Če pa definiramo funkcijo

$$\mathrm{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

za poljuben realen x, je po Osnovnem izreku integralskega računa 46 funkcija Erf zvezna in odvedljiva. Tako definirano funkcijo Erf imenujemo tudi funkcija napake in jo uporabljamo v več vejah matematike, kot na primer v verjetnosti in statistiki v povezavi z integralom normalno porazdeljene slučajne spremenljivke.

PRIMER 4.2.3. *Pokaži, da je funkcija napake* Erf *naraščajoča funkcija.*

REŠITEV: *Funkcija* Erf *je naraščajoča v tistih točkah* x, *kjer je* $\mathrm{Erf}'(x) \geq 0$. *Odvod funkcije* Erf *je po* 46 *enak*

$$\mathrm{Erf}'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}.$$

Ker je eksponentna funkcija povsod pozitivna, je tudi $\mathrm{Erf}'(x) > 0$ *za vse* $x \in \mathbb{R}$. *Zato je* Erf *naraščajoča funkcija.*

Ko enkrat poznamo Osnovni izrek integralskega računa 46, je lahko ugotoviti, kako izračunati določeni integral integrabilne funkcije, če poznamo njegov nedoločeni integral.

Naj bo f integrabilna funkcija na $[a,b]$ in naj bo $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Po 46 vemo, da je G nedoločeni integral funkcije f. Če je F poljuben nedoločeni integral funkcije f, potem po 34 vemo, da je $F(x) = G(x) + C = \int_a^x f(t)\,dt + C$. Zatorej je

$$F(b) - F(a) = (G(b) + C) - (G(a) - C) = G(b) - G(a) = G(b) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

S tem smo pokazali *Newton-Leibnizovo formulo*, ki nam pove, kako izračunati določeni integral funkcije, če poznamo nedoločenega. Velja torej

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a), \tag{47}$$

kjer je F (katerikoli) nedoločeni integral funkcije f. Če je F nedoločeni integral funkcije f, potem izračunamo določeni integral funkcije f na intervalu $[a, b]$ tako, da odštejemo funkcijski vrednosti nedoločenega integrala F na zgornji in spodnji meji intervala $[a, b]$. Razliko funkcijskih vrednosti označimo tudi kot

$$F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b = \Big[F(x)\Big]_a^b.$$

PRIMER 4.2.4. *Izračunaj integral* $\int_0^1 x^2\, dx$.

REŠITEV: *Vemo, da je*

$$\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3} + C,$$

torej je $\frac{x^3}{3}$ *eden izmed nedoločenih integralov funkcije* x^2. *Zato določeni integral po Newton-Leibnizovi formuli* 47 *izračunamo kot*

$$\int_0^1 x^2\, dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

Ta integral smo s precej več truda že izračunali po definiciji v primeru 4.2.1.

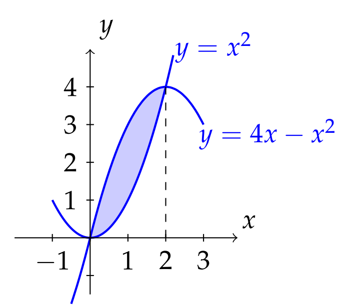
PRIMER 4.2.5. *Določi ploščino lika med grafoma* $y = 4x - x^2$ *in* $y = x^2$.

REŠITEV: *Če želimo določiti območje med dvema krivuljama, moramo najprej poračunati, kje se grafa sekata. To se zgodi v takšnih točkah* x, *v katerih sta funkcijski vrednosti enaki. Zato iščemo vse* x, *ki zadoščajo enačbi*

$$4x - x^2 = x^2.$$

Za takšne x *velja* $2x^2 = 4x$, *oziroma* $x(x-2) = 0$. *Torej se krivulji sekata v dveh točkah, pri* $x_1 = 0$ *in pri* $x_2 = 2$.

Na intervalu $[0, 2]$ *je zgornja funkcija enaka* $4x - x^2$, *spodnja pa* x^2. *Zato je po* 42 *ploščina med krivuljama enaka*



$$\int_0^2 ((4x - x^2) - (x^2))\, dx = \left(4\frac{x^2}{2} - 2\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3}.$$

Poznamo formulo za vpeljavo nove spremenljivke v nedoločeni integral 39. Pri vpeljavi nove spremenljivke v določeni integral moramo biti pazljivi. Če se v določenem integralu x spreminja od a do b in je $t = t(x)$ funkcija spremenljivke x, potem teče t od $t(a)$ do $t(b)$. Velja:

$$\int_a^b f(t(x))t'(x)\,dx = \int_{t(a)}^{t(b)} f(t)\,dt.$$

PRIMER 4.2.6. *Izračunaj integral* $\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx$.

REŠITEV: *Opazimo, da imenovalec ulomka nima realnih ničel in zato ne moremo postopati kot v primeru 4.1.6. Najprej preoblikujemo ulomek*

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx.$$

Sedaj uvedemo novo spremenljivko $t = x+1$. *Pri tem je* $dt = dx$. *Vendar, ko je v določenem integralu* $x \in [-1,0]$, *je* $t \in [0,1]$. *Zato po zamenjavi spremenljivke sledi*

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\,dt = \arctan t\Big|_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Prav tako lahko pri izračunu določenega integrala uporabimo pravilo za integracijo po delih. Če sta funkciji u in v odvedljivi na intervalu $[a,b]$, potem velja

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\,dx.$$

PRIMER 4.2.7. *Izračunaj integral* $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin x\,dx$.

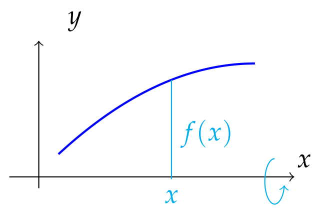
REŠITEV: *Za integracijo po delih izberimo* $u = x$ *in* $dv = \sin x\,dx$. *Pri tem je* $du = dx$ *in* $v = -\cos x$, *zato velja*

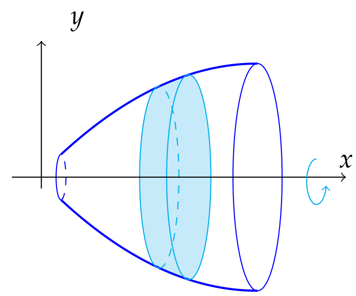
$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin x\,dx &= -x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\,dx = \\
&= -\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \\
&= -\frac{\pi\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

Poleg računanja ploščin likov lahko določeni integral med drugim uporabljamo tudi pri določanju prostornin teles. Tu si oglejmo, kako se izračuna prostornina telesa, ki je dobljeno z vrtenjem krivulje okoli osi x.

V koordinatnem sistemu je narisan graf $y = f(x)$ funkcije f, za katero velja $f(x) \geq 0$ za $x \in [a,b]$. To krivuljo zavrtimo okoli abscisne osi, s čimer dobimo telo, ki mu pravimo vrtenina. Tako je vsak presek vrtenine z ravnino, ki je pravokotna na abscisno os, krožnica.

Zanima nas prostornina tako pridobljene vrtenine. To naredimo podobno, kot smo definirali določeni integral na strani 76. Vrtenino na intervalu $[a,b]$ razrežemo na n rezin debeline $\delta_n = \frac{b-a}{n}$, kot bi rezali kruh na posamezne kose. Znotraj vsakega intervala širine δ_n na x osi





izberemo točko x_k, $k = 1, 2, \ldots, n$. Prostornino vsake rezine lahko ocenimo s prostornino valja, katerega osnovna ploskev je krog s polmerom $f(x_k)$, višina pa δ_n. Tako ima k-ta rezina prostornino približno $\pi(f(x_k))^2\delta_n$, prostornina vrtenine na intervalu $[a, b]$ pa je potem približno enaka

$$\pi \sum_{k=1}^{n} (f(x_k))^2 \delta_n.$$

Kot pri definiciji določenega integrala se izkaže, da se, ko gre $n \to \infty$, vsota vseh prostornin valjev približuje dejanski prostornini vrtenine in da velja

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx. \qquad \boxed{48}$$

PRIMER 4.2.8. *Določi prostornino telesa, ki ga dobiš z vrtenjem krivulje $y = e^{-x}$ okoli osi x na intervalu* $[0, 2]$.

REŠITEV: *Po formuli* $\boxed{48}$ *je prostornina enaka*

$$V = \pi \int_0^2 \left(e^{-x}\right)^2 \, dx = \pi \int_0^2 e^{-2x} \, dx = -\frac{\pi}{2} e^{-2x} \Big|_0^2 = -\frac{\pi}{2} \left(e^{-4} - 1\right) \doteq 1.54203.$$

Včasih lahko definiramo tudi določeni integral na neomejenem intervalu $[a, \infty]$.

Če je funkcija $f \colon [a, \infty) \to \mathbb{R}$ zvezna, potem je

$$\int_a^\infty f(x) \, dx = \lim_{t \to \infty} \int_a^t f(x) \, dx,$$

če obstajata integral in limita na desni strani za vsak $t \geq a$. Podobno definiramo za zvezno funkcijo $f \colon (-\infty, a] \to \mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^a f(x) \, dx = \lim_{t \to -\infty} \int_t^a f(x) \, dx,$$

če obstajata integral in limita na desni strani za vsak $t \leq a$.
Takšne integrale imenujemo *posplošeni integrali*.

Posplošeni integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ lahko izračunamo kot vsoto dveh posplošenih integralov

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx + \int_{a}^{\infty} f(x)\, dx$$

kjer je a poljubno realno število.

PRIMER 4.2.9. *Ali je prostornina območja, ki ga dobiš z vrtenjem krivulje $y = e^{-x}$ okoli osi x na intervalu $[0, \infty)$, končna ali neskončna?*

REŠITEV: *Kot v primeru 4.2.8 izračunamo integral*

$$V = \pi \int_0^{\infty} \left(e^{-x}\right)^2\, dx = \pi \int_0^{\infty} e^{-2x}\, dx.$$

Sedaj po definiciji posplošenega integrala velja

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\infty} e^{-2x}\, dx = \lim_{t \to \infty} \pi \int_0^{t} e^{-2x}\, dx = \\ &= -\frac{\pi}{2} \lim_{t \to \infty} e^{-2x}\Big|_0^t = -\frac{\pi}{2} \left(\lim_{t \to \infty} e^{-2t} - 1 \right) = \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

torej je prostornina območja končna.

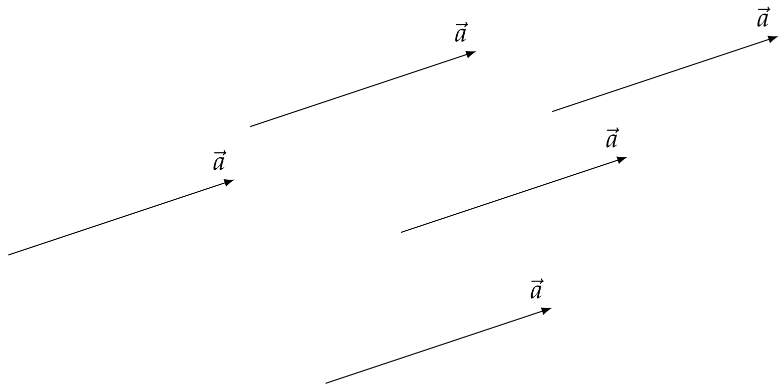
POGLAVJE 5

Vektorji v ravnini in prostoru

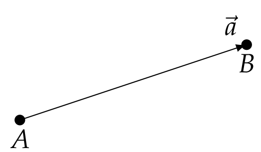
5.1. Osnovni pojmi in lastnosti vektorjev

Ko slišimo besedo vektor, si verjetno marsikdo ob njej predstavlja neko "puščico", torej usmerjeno daljico. To je grafični prikaz količine, ki ima poleg svoje dolžine tudi smer. Kot na primer hitrost, ki ima poleg velikosti tudi smer. Če vidimo kamen, ki po zraku leti s hitrostjo 20 km/h, ne da bi se zavedali hitro ugotovimo, v katero smer leti (da vemo, ali se mu moramo umakniti ali ne). Puščica na koncu daljice kaže v smer vektorja, dolžina daljice pa predstavlja dolžino vektorja. Vektorje bomo označevali z malimi tiskanimi črkami, nad katere bomo narisali puščico ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{x}$, $\vec{v}$,...).

Pri tem vse usmerjene daljice, ki kažejo v isto smer in ki imajo isto dolžino, predstavljajo isti vektor, neodvisno od tega, v kateri točki jih začnemo risati.

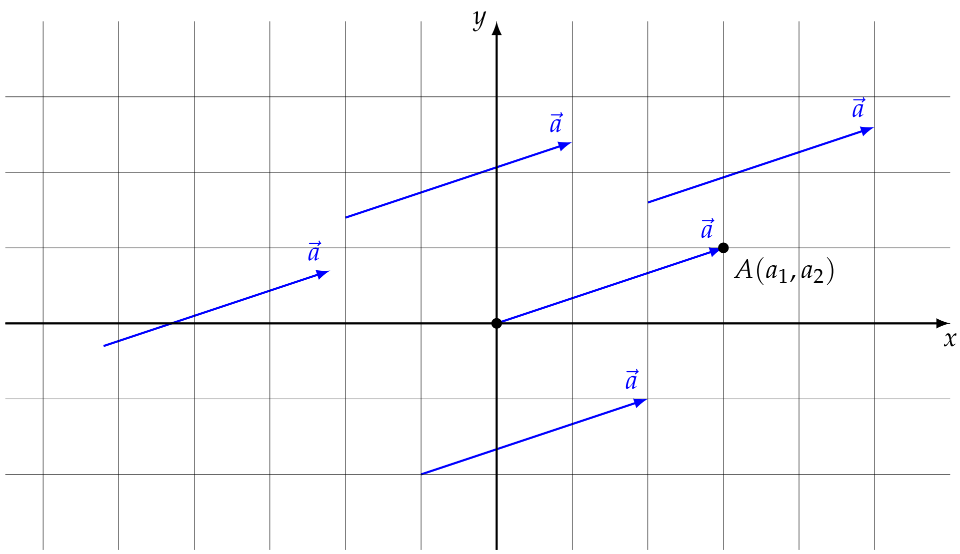


Če bomo želeli izmed vseh možnih predstavitev vektorja $\vec{a}$ izbrati tistega, ki se začne v točki A, konča pa v točki B, bomo bomo pisali tudi $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$. Pri tem bomo točko A imenovali *začetna točka* vektorja $\overrightarrow{AB}$, točko B pa *končna točka* vektorja $\overrightarrow{AB}$.



Vektor je količina, določena s svojo dolžino in smerjo.

5.1.1. Vektorji v koordinatnem sistemu. Če želimo računati z vektorji, jih je smiselno predstaviti v kartezičnem koordinatnem sistemu. Za začetek si poglejmo, kako predstavimo vektorje v ravnini.

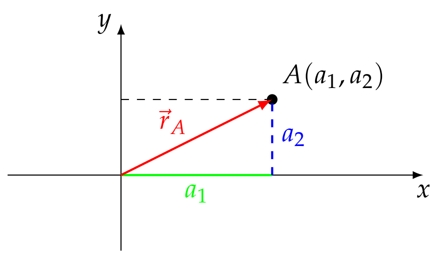


Med vsemi usmerjenimi daljicami, ki predstavljajo isti vektor $\vec{a}$, izberimo tistega, ki ima začetno točko v koordinatnem izhodišču. Začetna točka vektorja $\vec{a}$ je torej $(0,0)$, končna pa naj bo $A(a_1, a_2)$. Koordinati a_1 in a_2 imenujemo *komponenti* vektorja $\vec{a}$ in pišemo

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}.$$

Komponente vektorja pišemo v stolpec, da ta zapis razlikujemo od zapisa točke $A(a_1, a_2)$. Ker ima tako definiran vektor $\vec{a}$ dve realni komponenti, bomo uporabljali oznako $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$.

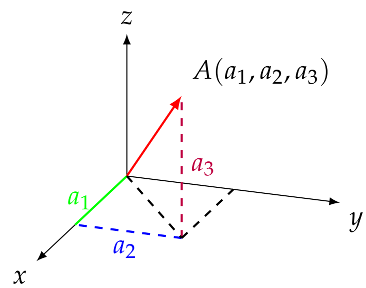
Če je $A = (a_1, a_2)$ dana točka v ravnini $\mathbb{R}^2$, potem vektor $\overrightarrow{OA}$ z začetno točko v koordinatnem izhodišču in končno točko A imenujemo *krajevni vektor* točke A in ga zapišemo z oznako $\vec{r}_A = \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$.



Vektor, ki ima obe komponenti enaki 0, imenujemo *ničelni vektor* in ga označimo z $\vec{0}$. Torej je

$$\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Podobno postopamo tudi v tridimenzionalnem prostoru $\mathbb{R}^3$.



Če ima končna točka A vektorja $\vec{a}$ z začetkom v koordinatem izhodišču koordinate (a_1, a_2, a_3), potem koordinate a_1, a_2 in a_3 predstavljajo komponente vektorja

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix},$$

pri tem pa pišemo $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$.

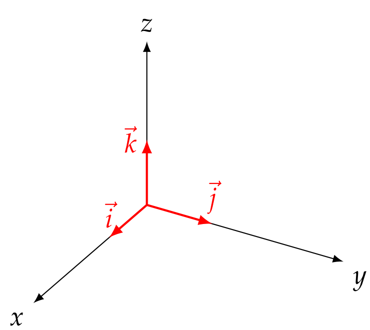
Vektor $\overrightarrow{OA}$ prav tako imenujemo *krajevni vektor* točke A in ga zapišemo z oznako $\vec{r}_A = \overrightarrow{OA}$. Pri tem zopet z $\vec{0}$ označimo vektor, ki ima vse komponente enake 0, torej je

$$\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

V prostoru $\mathbb{R}^3$ posebej izpostavimo še tri vektorje, ki jih bomo pogosto omenjali in uporabljali. To so vektorji

$$\vec{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \vec{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ki kažejo v smereh koordinatnih osi.



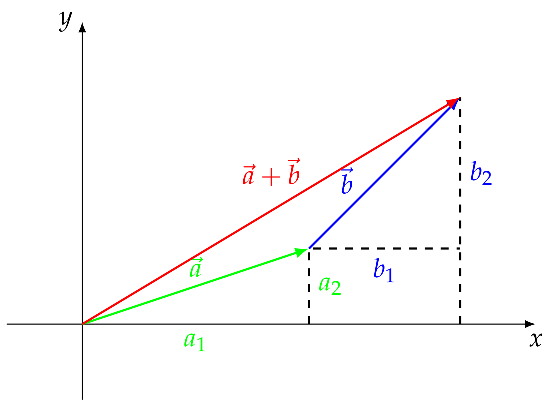
Seveda obstajajo tudi vektorji z več kot tremi komponentami. Ker pa je naša geometrijska predstava najbolj vezana na prostor $\mathbb{R}^3$, bomo odslej večinoma delali z vektorji v R^3. Večina operacij (pravzaprav prav vse razen vektorskega produkta) je prav tako definiranih v $\mathbb{R}^n$ in zanje veljajo ista pravila kot za vektorje s tremi komponentami, le da dodamo ali odvzamemo željeno število komponent.

5.1.2. Seštevanje vektorjev. Da bomo lahko z vektorji tudi računali, moramo najprej definirati nekaj operacij z njimi. V tem razdelku si bomo ogledali, kako seštevamo vektorje, in v naslednjem, kako jih množimo z realnimi števili.

Najprej si oglejmo, kako seštejemo dva vektorja. Vsoto vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ označimo z $\vec{a}+\vec{b}$ in jo definiramo tako, da vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ seštejemo po komponentah.

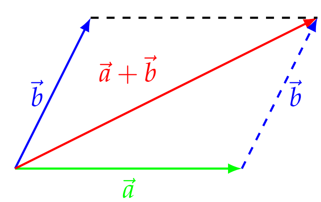
Vsota vektorjev $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ in $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ je vektor $\vec{a}+\vec{b} = \begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{bmatrix}$.

Grafično si seštevanje v $\mathbb{R}^2$ ponazorimo v koordinatnem sistemu.



Tudi v splošnem, ne le v $\mathbb{R}^2$, vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ grafično seštejemo tako, da vektor $\vec{b}$ premaknemo vzporedno, da se njegova začetna točka ujema s končno točko vektorja $\vec{a}$. Nato vsoto $\vec{a}+\vec{b}$ narišemo kot tisti vektor, ki poteka od začetne točke vektorja $\vec{a}$ do končne točke vektorja $\vec{b}$.

Če bi vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ prestavili tako, da bi imela skupni začetni točki, bi vsoto $\vec{a}+\vec{b}$ zagledali kot tisto diagonalo v paralelogramu napetem na vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$, ki ima skupno začetno točko z vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$.



Ker za realna števila velja pravilo o zamenjavi členov $a+b=b+a$ ter pravilo o združevanju členov $a+(b+c)=(a+b)+c$, lahko ti dve pravili uporabimo na vsaki komponenti vektorjev in zatorej veljata tudi za vektorje

$$\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$$

in

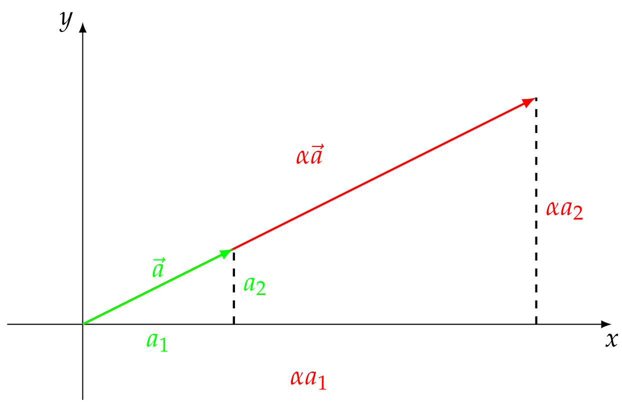
$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c} = \vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right).$$

Če vektorju $\vec{a}$ prištejemo ničelni vektor, vsaki njegovi komponenti prištejemo število 0, zato se vektor $\vec{a}$ ne spremeni.

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$

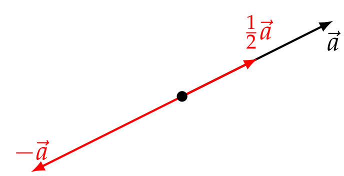
5.1.3. Množenje vektorja s številom. Druga osnovna operacija je množenje vektorjev s števili. Tak produkt imenujemo kar večkratnik vektorja. Kot bomo videli, večkratnik vektorja kaže v isto ali nasprotno smer kot prvotni vektor.

Produkt vektorja $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ *s številom* α je vektor $\alpha\vec{a} = \begin{bmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \alpha a_3 \end{bmatrix}$.



Poljubni večkratnik ničelnega vektorja je ničelni vektor. Produkt neničelnega vektorja s številom je vektor, ki ima za $|\alpha| \neq 1$ drugačno dolžino.

Če množimo neničelni vektor $\vec{a}$ s pozitivnim številom, kaže produkt v isto smer kot vektor $\vec{a}$, torej predstavlja razteg ($\alpha > 1$) ali skrčitev ($0 < \alpha < 1$) vektorja. Če ga množimo z negativnim številom, pa kaže v nasprotno smer. Če množimo vektor $\vec{a}$ s številom 0, dobimo ničelni vektor $\vec{0}$.



Če vektor $\vec{a}$ pomnožimo s številom -1, označimo produkt $(-1)\vec{a}$ z $-\vec{a}$. To je vektor enake dolžine kot vektor $\vec{a}$, le da v primeru, ko je $\vec{a} \neq \vec{0}$, kaže v nasprotno smer. Če vektorja $\vec{a}$ in $-\vec{a}$ seštejemo, za rezultat dobimo ničelni vektor

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0},$$

saj velja

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Odslej nam bo simbol odštevanja pomenil prištevanje nasprotnega vektorja:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

Prav tako je vektorjem vseeno, ali jih najprej množimo z enim realnim številom α in nato še z drugim β ali pa raje kar z njunim produktom $\alpha\beta$. Velja namreč

$$\alpha\left(\beta\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = \alpha\begin{bmatrix} \beta a_1 \\ \beta a_2 \\ \beta a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\beta a_1 \\ \alpha\beta a_2 \\ \alpha\beta a_3 \end{bmatrix} = (\alpha\beta)\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

in zato

$$\boxed{\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}.}$$

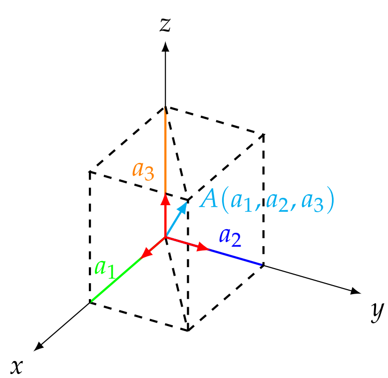
Operaciji seštevanja in množenja vektorjev s številom povezujeta zakona distributivnosti. Lahko se prepričamo, da velja

$$\boxed{(\alpha+\beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}}$$ 49

in

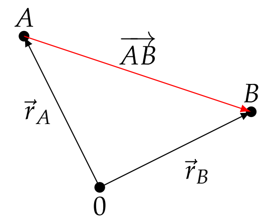
$$\boxed{\alpha(\vec{a}+\vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}.}$$ 50

5.1.4. Linearne kombinacije vektorjev. Z besedno zvezo *linearna kombinacija* vektorjev $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ označujemo poljubno vsoto večkratnikov vektorjev $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$, torej nam ta izraz združuje operaciji seštevanja vektorjev in množenja vektorja s številom. Vsak vektor v $\mathbb{R}^3$ lahko zapišemo kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{i}$, $\vec{j}$ in $\vec{k}$.



Namreč, vsak vektor $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ je vsota treh vektorjev $\begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ a_2 \\ 0 \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_3 \end{bmatrix}$, zatorej velja

$$\vec{r}_A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = a_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_3\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}.$$



V praksi pogosto potrebujemo vektorje, ki se začnejo v neki in končajo v neki drugi točki. Zato si oglejmo, kako določimo vektor $\overrightarrow{AB}$, ki se začne v točki A in konča v točki B.

Namesto, da se sprehodimo od A do B po bližnjici, torej po vektorju $\overrightarrow{AB}$, lahko odidemo tudi preko koordinatnega izhodišča. Torej najprej od točke A v nasprotni smeri krajevnega vektorja $\vec{r}_A$ do koordinatnega izhodišča 0 ter nato v smeri krajevnega vektorja $\vec{r}_B$ do točke B. Velja

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A0} + \overrightarrow{0B} = -\overrightarrow{0A} + \overrightarrow{0B} = -\vec{r}_A + \vec{r}_B,$$

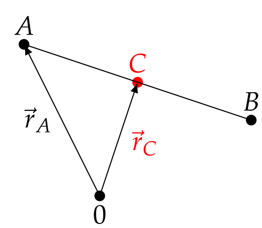
torej vektor med dvema točkama izračunamo tako, da od koordinat končne točke odštejemo koordinate začetne točke.

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A.}$$

PRIMER 5.1.1. *Letalo se nahaja v točki $(-1, 2, 3)$. V katero smer mora poleteti, da bo po najkrajši poti prišlo do točke $(3, 0, -1)$?*

REŠITEV: *Če se letalo nahaja v točki $A(-1, 2, 3)$, potem mora poleteti v smeri vektorja $\overrightarrow{AB}$, da bo po najkrajši poti prišlo do $B(3, 0, -1)$. Vektor $\overrightarrow{AB}$ je enak*

$$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}.$$



Pokažimo, kako lahko preprosto izračunamo razpolovišče daljice AB. Če označimo razpolovišče daljice AB s C, želimo izračunati koordinate krajevnega vektorja $\vec{r}_C$. Ker je C razpolovišce AB, velja $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ in zato $\vec{r}_C = \overrightarrow{0C} = \overrightarrow{0A} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0A} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \vec{r}_A + \frac{1}{2}(\vec{r}_B - \vec{r}_A) = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_B)$. Torej lahko koordinate razpolovišča daljice AB izračunamo tako, da izračunamo aritmetično sredino posameznih koordinat krajišč:

$$\vec{r}_C = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_B).$$

5.2. Skalarni produkt in dolžina vektorja

Doslej smo spoznali, kako lahko vektorje seštevamo in kako jih množimo s številom. V nadaljevanju bomo spoznali dva načina, kako lahko vektorje med seboj tudi množimo. Prvo množenje, ki ga bomo bolj podrobno opisali, je *skalarni* produkt. Ta nam dva vektorja zmnoži v *skalar*, torej v število. V naslednjem razdelku bomo spoznali še *vektorski* produkt, ki dva vektorja v $\mathbb{R}^3$ zmnoži v *vektor*.

5.2.1. Definicija skalarnega produkta. Skalarni produkt dveh vektorjev izračunamo tako, da zmnožimo posamezne komponente vektorjev in dobljene produkte seštejemo. To formalno definiramo z naslednjim pravilom:

Skalarni produkt vektorjev $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ in $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ je število

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Če bi pri tem namesto vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ iz trirazsežnega prostora $\mathbb{R}^3$ izbrali vektorja iz $\mathbb{R}^2$, bi v definiciji preprosto izpustili zadnji sumand. Podobno bi lahko predpis posplošili na večdimenzionalne vektorje.

Takoj opazimo, da je skalarni produkt poljubnega vektorja z ničelnim vektorjem enak 0, saj velja $\vec{a} \cdot \vec{0} = a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0 = 0$.

PRIMER 5.2.1. *Za vektorje* $\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\vec{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ *in* $\vec{d} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ *izračunaj vse skalarne produkte, ki jih je mogoče izračunati.*

REŠITEV: *Po definiciji velja*

$$\begin{aligned}
\vec{a} \cdot \vec{a} &= 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 5 & \vec{a} \cdot \vec{b} &= 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-3) = -2 \\
\vec{b} \cdot \vec{b} &= 4 \cdot 4 + (-3) \cdot (-3) = 25 & \vec{b} \cdot \vec{a} &= 4 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 = -2 \\
\vec{c} \cdot \vec{c} &= 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + (-3) \cdot (-3) = 14 & \vec{c} \cdot \vec{d} &= 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + (-3) \cdot 1 = -4 \\
\vec{d} \cdot \vec{d} &= (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 2 & \vec{d} \cdot \vec{c} &= (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) = -4.
\end{aligned}$$

Skalarnega produkta vektorja z dvema in vektorja s tremi komponentami pa ne moremo izračunati.

5.2.2. Dolžina vektorja. Skalarni produkt poljubnega vektorja $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ s samim seboj je enak

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2.$$

Ker je vsak sumand kvadrat realnega števila, velja

$$\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0.$$

Tako lahko za vsak vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ izračunamo tudi kvadratni koren skalarnega produkta tega vektorja s samim sabo. To število imenujemo dolžina (ali s tujko norma) vektorja $\vec{a}$.

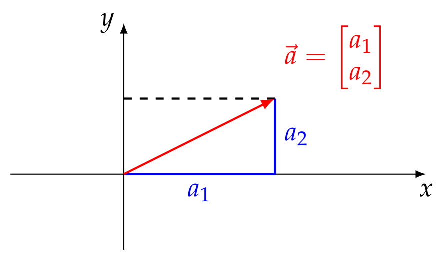
Dolžina vektorja $\vec{a}$ je število $\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$.

V primeru 5.2.1 je $||\vec{a}|| = \sqrt{5}$, $||\vec{b}|| = 5$, $||\vec{c}|| = \sqrt{14}$ in $||\vec{d}|| = \sqrt{2}$.

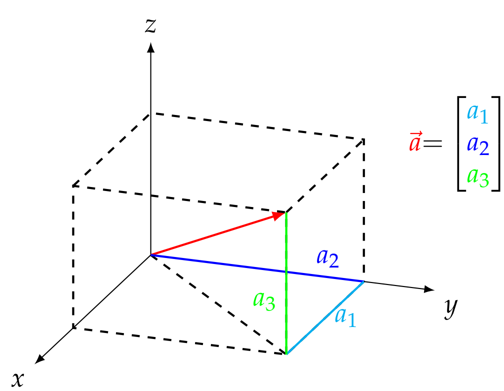
Najmanjša možna dolžina vektorja je enaka 0. Če je dolžina nekega vektorja $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ enaka 0, je torej $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0$. Ker pa so vsi trije sumandi nenegativna števila, ki se seštejejo v 0, sledi, da so vsi trije enaki 0. Torej velja $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, oziroma $\vec{a} = \vec{0}$. Ugotovili smo naslednje.

Vektor $\vec{0}$ je edini vektor, ki ima dolžino 0.

V dvorazsežnem prostoru $\mathbb{R}^2$ je dolžina vektorja $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ enaka $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, kar se po Pitagorovem izreku ujema z dolžino daljice, ki jo določa vektor $\vec{a}$.



Prav tako se dolžina vektorja $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, ki je enaka $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$, po Pitagorovem izreku ujema z dolžino daljice, ki jo določa vektor $\vec{a}$ v $\mathbb{R}^3$, saj $\vec{a}$ predstavlja telesno diagonalo kvadra s stranicami a_1, a_2 in a_3.



S pomočjo dolžine vektorja lahko enostavno izračunamo razdaljo $d(A, B)$ med točkama $A(a_1, a_2, a_3)$ in $B(b_1, b_2, b_3)$ v prostoru. Le-ta je namreč enaka dolžini vektorja $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{bmatrix}$, ki jo izračunamo kot

$$d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}.$$

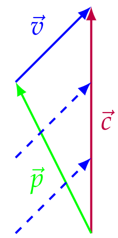
Izmed vseh vektorjev, ki kažejo v isto smer, bomo posebej imenovali tistega, ki ima dolžino 1. Takšni so na primer $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$.

Vektorju, katerega dolžina je enaka 1, pravimo *enotski* vektor.

Za poljuben vektor $\vec{a}$ je enotski vektor, ki kaže v smeri $\vec{a}$, enak

$$\frac{\vec{a}}{||\vec{a}||}.$$

PRIMER 5.2.2. *Letalo mora leteti v smeri* $\begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ *s hitrostjo* 954 km/h. *Pri letu ga ovira veter, ki piha s hitrostjo* 60 km/h *v smeri* $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. *Kakšno smer in hitrost mora pilot naravnati na avtopilotu, da bo letalo letelo v željeni smeri?*



REŠITEV: *Ciljno smer in hitrost letala lahko ponazorimo z vektorjem $\vec{c}$ dolžine 954 v smeri vektorja $\vec{a} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$, smer in hitrost vetra pa ponazorimo z vektorjem $\vec{v}$ dolžine 60 v smeri vektorja $\vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. Vektor $\vec{a}$ je dolžine $||\vec{a}|| = \sqrt{8^2 + 4^2 + 1^2} = 9$, zato je vektor dolžine 1 v smeri vektorja $\vec{a}$ enak $\frac{1}{9}\vec{a}$ in vektor $\vec{c}$ dolžine 954 v smeri $\vec{a}$ enak*

$$\vec{c} = \frac{954}{9}\vec{a} = 106\vec{a} = \begin{bmatrix} 848 \\ 424 \\ 106 \end{bmatrix}.$$

Podobno izračunamo, da je vektor $\vec{b}$ dolžine $||\vec{b}|| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = 3$. Zato je vektor dolžine 1 v smeri vektorja $\vec{b}$ enak $\frac{1}{3}\vec{b}$ in vektor $\vec{v}$ dolžine 60 v smeri $\vec{b}$ enak

$$\vec{v} = \frac{60}{3}\vec{b} = 20\vec{b} = \begin{bmatrix} -20 \\ 40 \\ 40 \end{bmatrix}.$$

Vektor $\vec{p}$, kamor mora pilot naravnati avtopilota, da bo letalo letelo v smeri $\vec{c}$, je enak

$$\vec{p} = \vec{c} - \vec{v} = \begin{bmatrix} 868 \\ 384 \\ 66 \end{bmatrix},$$

njegova dolžina pa je enaka $\vec{p} = 951.4$. Torej mora pilot določiti hitrost 951.4 km/h *v smeri vektorja* $\vec{p} = \vec{c} - \vec{v} = \begin{bmatrix} 828 \\ 384 \\ 66 \end{bmatrix}$.

Skalarni produkt ima mnogo lastnosti, ki jih ima množenje realnih števil. Iz definicije skalarnega produkta se je lahko prepričati, da velja

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}, \qquad \boxed{51}$$

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} \qquad \boxed{52}$$

in

$$(\alpha\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\alpha\vec{b}) = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b}) \qquad \boxed{53}$$

za poljubne vektorje $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ ter poljubno realno število α.

PRIMER 5.2.3. *Izračunaj vrednost izraza $\vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ za dane vektorje $\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ in $\vec{c} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.*

REŠITEV: *Direktni način, kako izračunati vrednosti izraza $\vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$, nam da rezultat*

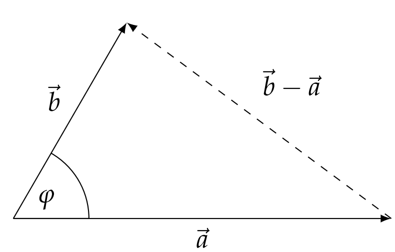
$$\vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} = (1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + (-3) \cdot 1) + ((-1) \cdot (-1) + (-2) \cdot 2 + 3 \cdot 1) = 0.$$

Hkrati pa takoj opazimo, da je vektor $\vec{b}$ enak vektorju $-\vec{a}$ in zato velja $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$. Zaradi distributivnosti skalarnega produkta $\boxed{52}$ *velja*

$$\vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \vec{0} \cdot \vec{c} = 0,$$

s čimer smo hitreje prišli do istega rezultata kot pri prvotnem izračunu.

5.2.3. Geometrijski pomen skalarnega produkta. Skalarni produkt dveh vektorjev je tesno povezan s kotom, ki ga ta dva vektorja oklepata. Oglejmo si torej neničelna vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$, ki oklepata kot $\varphi \in [0, \pi]$.



Spomnimo se kosinusnega izreka, ki pravi, da za dolžine stranic $\|\vec{a}\|$, $\|\vec{b}\|$ in $\|\vec{b}-\vec{a}\|$ v trikotniku velja

$$||\vec{b}-\vec{a}||^2 = ||\vec{a}||^2 + ||\vec{b}||^2 - 2||\vec{a}||\,||\vec{b}||\cos\varphi. \tag{10}$$

Po definiciji dolžine vektorja in lastnostih $\boxed{51}$ in $\boxed{52}$ je leva stran enakosti enaka

$$||\vec{b}-\vec{a}||^2 = (\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a}) = \vec{b}\cdot\vec{b} - \vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{b}\cdot\vec{a} + \vec{a}\cdot\vec{a} = ||\vec{a}||^2 + ||\vec{b}||^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b}. \tag{11}$$

Če v enakosti (10) levo stran nadomestimo z dobljenim izrazom v (11), se v njem izničita člena $||\vec{a}||^2$ in $||\vec{b}||^2$, iz česar po krajšanju števila 2 na obeh straneh dobimo zvezo

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ||\vec{a}||\,||\vec{b}||\cos\varphi.$$

$\boxed{54}$

Za neničelna vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ opazimo, da je desna stran enakosti $\boxed{54}$ enaka 0 natanko tedaj, ko je $\cos\varphi = 0$. Če je $\varphi \in [0,\pi]$, potem je $\cos\varphi = 0$ če in samo če je $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Če je kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$ enak $\frac{\pi}{2}$, pravimo, da sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ *pravokotna* ali *ortogonalna*. Za vektor $\vec{0}$ pravimo, da je pravokoten na vse vektorje.

Torej smo premislili, da lahko s skalarnim množenjem dveh vektorjev preverimo, ali sta vektorja pravokotna, oziroma, da velja naslednja ekvivalenca.

Vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ sta pravokotna natanko tedaj, ko velja $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$.

$\boxed{55}$

PRIMER 5.2.4. *Določi tako število a, da bo trikotnik $\triangle ABC$ z oglišči $A(3,2,1)$, $B(a,-1,0)$ in $C(1,2,-1)$ pravokoten trikotnik s pravim kotom pri oglišču A.*

REŠITEV: *Če je $\triangle ABC$ pravokoten trikotnik s pravim kotom pri oglišču A, potem morata biti vektorja $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{AC}$ pravokotna. Iz ekvivalence $\boxed{55}$ sledi, da je $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$.*

Ker je $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} a-3 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$ ter $\overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$, je pogoj $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$ ekvivalenten pogoju $-2(a-3)+2 = 0$, oziroma $a = 4$.

Iz zveze $\boxed{54}$ lahko za poljubna neničelna vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ izračunamo kot $\varphi \in [0,\pi]$ med njima z enačbo

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|}.$$

$\boxed{56}$

PRIMER 5.2.5. *Določi kot, ki ga oklepata vektorja $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ ter $\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.*

REŠITEV: *Naj bo φ kot med danima vektorjema. Po enakosti* $\boxed{56}$ *velja*

$$\cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{18}} = \frac{1}{2},$$

zato dana vektorja oklepata kot $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

PRIMER 5.2.6. *Izračunaj dolžine stranic ter notranje kote trikotnika z oglišči $A(1,-1,1)$, $B(-1,1,1)$, $C(1,0,2)$.*

REŠITEV: *Stranice trikotnika so določene z vektorji*

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix}-2\\2\\0\end{bmatrix}, \ \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} \ \text{ in } \ \overrightarrow{BC} = \begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix},$$

torej so njihove dolžine enake $||\overrightarrow{AB}|| = 2\sqrt{2}$, $||\overrightarrow{AC}|| = \sqrt{2}$ in $||\overrightarrow{BC}|| = \sqrt{6}$.

Kot α pri oglišču A je kot med vektorjema $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{AC}$, zato s pomočjo enakosti $\boxed{56}$ *dobimo*

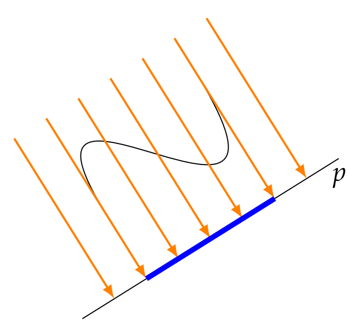
$$\cos\alpha = \frac{2}{2\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2},$$

iz česar sledi $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Podobno je kot β pri oglišču B kot med vektorjema $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{BC}$, zato velja

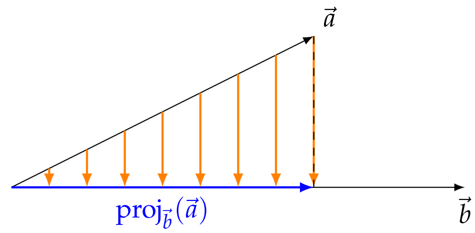
$$\cos\beta = \frac{6}{2\sqrt{2}\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

in tako $\beta = \frac{\pi}{6}$. Ker je skalarni produkt vektorjev $\overrightarrow{AC}$ in $\overrightarrow{BC}$ enak 0, je $\gamma = \frac{\pi}{2}$. Kot γ lahko izračunamo tudi tako, da upoštevamo, da je vsota notranjih kotov v trikotniku enaka π.

5.2.4. Pravokotna projekcija. V geometriji večkrat projiciramo. Projiciramo lahko na razne objekte, v prostoru $\mathbb{R}^3$ pa najpogosteje na ravnino ali na premico. Z različnimi projekcijami lahko na primer površje geoida Zemlje prikažemo na papirju (zemljevidi), predvajamo diapozitive na velikem platnu ali pa se igramo s sencami na steni. Če projiciramo pod pravim kotom, takšni projekciji pravimo *pravokotna projekcija*. Tudi, ko operiramo z visokodimenzionalnimi podatki, je zelo pomembno poznati projekcije na prostore nižjih dimenzij.



Če prestavimo vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ v začetni položaj, si pravokotno projekcijo vektorja $\vec{a}$ na neničelni vektor $\vec{b}$ najlažje predstavljamo kot senco pod vektorjem $\vec{a}$, če žarki padajo pravokotno na vektor $\vec{b}$.



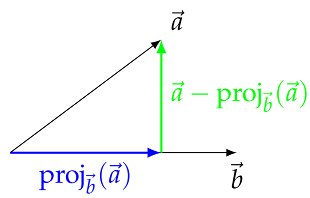
Pravokotno projekcijo vektorja $\vec{a}$ na vektor $\vec{b}$ bomo označili s $\mathrm{proj}_{\vec{b}}(\vec{a})$. Formalno je torej $\mathrm{proj}_{\vec{b}}(\vec{a})$ tak vektor, da je

- njegova smer določena s smerjo vektorja $\vec{b}$, torej je

$$\mathrm{proj}_{\vec{b}}(\vec{a}) = \beta\vec{b}, \tag{12}$$

- njegova dolžina določena s pogojem, da je vektor $\vec{a} - \mathrm{proj}_{\vec{b}}(\vec{a})$ pravokoten na $\vec{b}$, torej je

$$\left(\vec{a} - \mathrm{proj}_{\vec{b}}(\vec{a})\right) \cdot \vec{b} = 0. \tag{13}$$



Če v enakosti (13) nadomestimo $\mathrm{proj}_{\vec{b}}(\vec{a})$ z $\beta\vec{b}$ iz (12), dobimo

$$(\vec{a} - \beta\vec{b}) \cdot \vec{b} = 0,$$

oziroma po pravilu 52:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \beta\,\vec{b} \cdot \vec{b}.$$

Ker je $\vec{b}$ neničelni vektor, je njegova dolžina različna od 0, zato lahko iz zadnje enakosti izrazimo β kot

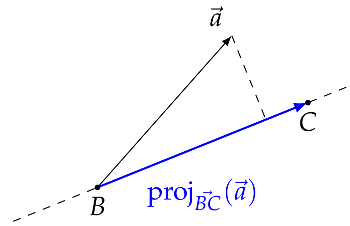
$$\beta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}.$$

Iz enakosti (12) torej sledi formula, po kateri bomo računali pravokotno projekcijo vektorja $\vec{a}$ na vektor $\vec{b}$:

$$\boxed{\mathrm{proj}_{\vec{b}}(\vec{a}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}\,\vec{b}.}$$

PRIMER 5.2.7. *Izračunaj pravokotno projekcijo vektorja* $\vec{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ *na premico skozi točki* $B(0, -1, 2)$ *in* $C(-4, 3, 0)$.

REŠITEV: *Premica skozi točki B in C vsebuje tudi vektor $\overrightarrow{BC}$. Zato pravokotno projekcijo vektorja $\vec{a}$ na premico skozi točki B in C izračunamo kot pravokotno projekcijo vektorja $\vec{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ na vektor $\overrightarrow{BC} = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$. Velja torej*



$$\mathrm{proj}_{\overrightarrow{BC}}(\vec{a}) = \frac{\vec{a} \cdot \overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BC}\|^2} \overrightarrow{BC} = \frac{18}{36} \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

PRIMER 5.2.8. *V trikotniku z oglišči $A(1,2,1)$, $B(-2,0,7)$ in $C(1,1,3)$ poišči nožišče višine na stranico AB. Izračunaj tudi dolžino višine na stranico AB.*

REŠITEV: *Označimo nožišče višine na stranico AB z N. Da bi izračunali koordinate točke N, potrebujemo vektor $\overrightarrow{AN}$, ki ga bomo izračunali kot projekcijo vektorja $\overrightarrow{AC}$ na vektor $\overrightarrow{AB}$. Ker je $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}$ in $\overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, sledi*

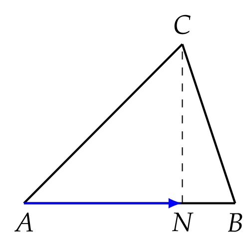
$$\overrightarrow{AN} = \mathrm{proj}_{\overrightarrow{AB}}(\overrightarrow{AC}) = \frac{0+2+12}{9+4+36} \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix} = \frac{2}{7} \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Krajevni vektor točke N je enak

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AN} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{2}{7} \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \\ 19 \end{bmatrix},$$

torej je nožišče višine na stranico AB enako $N(\frac{1}{7}, \frac{10}{7}, \frac{19}{7})$.

Višina na stranico AB je določena z vektorjem $\overrightarrow{NC} = \begin{bmatrix} \frac{6}{7} \\ -\frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} \end{bmatrix}$, torej je njena dolžina enaka $||\overrightarrow{NC}|| = \sqrt{\frac{36+9+4}{49}} = 1$.



5.3. Vektorski in mešani produkt vektorjev

V tem razdelku si bomo ogledali vektorski produkt dveh vektorjev v $\mathbb{R}^3$. Takšen produkt s smiselnimi lastnostmi je mogoče definirati le v $\mathbb{R}^3$. V nasprotju s skalarnim produktom dveh vektorjev, ki je število, je vektorski produkt dveh vektorjev v $\mathbb{R}^3$ zopet *vektor* v $\mathbb{R}^3$.

5.3.1. Definicija vektorskega produkta. Na prvi pogled je vektorski produkt morda definiran rahlo nenavadno. Namreč:

Vektorski produkt vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ v $\mathbb{R}^3$ je vektor

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix}.$$

Pa vendar se izkaže, da je takšna definicija smiselna.

PRIMER 5.3.1. *Določi vektorski produkt vektorjev* $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ *in* $\vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$.

REŠITEV: *Vektorski produkt* $\vec{a} \times \vec{b}$ *je po definiciji enak*

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 4 - (-3) \cdot 0 \\ (-3) \cdot (-1) - 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Za poljuben vektor $\vec{a}$ velja

$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0},$$

saj je

$$\vec{a} \times \vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 a_3 - a_3 a_2 \\ a_3 a_1 - a_1 a_3 \\ a_1 a_2 - a_2 a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

5.3.2. Geometrijski pomen vektorskega produkta. Oglejmo si skalarni produkt vektorjev $\vec{a} \times \vec{b}$ in $\vec{a}$.

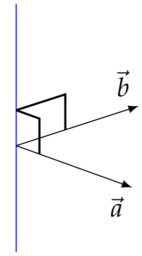
$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} &= \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) a_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) a_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) a_3 = \\ &= a_1 a_2 b_3 - a_1 a_3 b_2 + a_2 a_3 b_1 - a_1 a_2 b_3 + a_1 a_3 b_2 - a_2 a_3 b_1 = \\ &= 0 \end{aligned}$$

Podobno bi pokazali, da velja tudi

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0,$$

iz česar po 55 sledi naslednja pomembna trditev:

Vektorski produkt $\vec{a} \times \vec{b}$ je pravokoten na oba vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$. 57



PRIMER 5.3.2. *Določi vsaj tri vektorje, ki so pravokotni na vektorja* $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ *in* $\vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$.

REŠITEV: *Vektorski produkt* $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 4 - (-3) \cdot 0 \\ (-3) \cdot (-1) - 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$ *je po ugotovitvi* 57 *gotovo eden izmed vektorjev, ki so pravokotni tako na* $\vec{a}$ *kot na* $\vec{b}$. *In ker je vektor* $\begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$ *pravokoten na* $\vec{a}$ *in* $\vec{b}$, *je tudi vsak njegov večkatnik pravokoten nanju. Na primer, vektorji* $\begin{bmatrix} 8 \\ -10 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 40 \\ -50 \\ 10 \end{bmatrix}$ *in* $\vec{0}$ *tudi vsi pravokotni na* $\vec{a}$ *in* $\vec{b}$.

Poznamo torej smer vektorskega produkta $\vec{a} \times \vec{b}$, sedaj pa želimo izračunati še njegovo dolžino. Najprej izračunajmo

$$\begin{aligned} ||\vec{a} \times \vec{b}||^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 = \\ &= (a_2^2b_3^2 + a_3^2b_2^2 + a_3^2b_1^2 + a_1^2b_3^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2) - \\ &\quad -2(a_2a_3b_2b_3 + a_1a_3b_1b_3 + a_1a_2b_1b_2). \end{aligned}$$

Če označimo s $\varphi \in [0, \pi]$ kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$, dobimo, da je ta izraz enak izrazu

$$\begin{aligned} ||\vec{a}||^2\,||\vec{b}||^2 \sin^2\varphi &= ||\vec{a}||^2\,||\vec{b}||^2(1 - \cos^2\varphi) = \\ &= ||\vec{a}||^2\,||\vec{b}||^2 - ||\vec{a}||^2\,||\vec{b}||^2 \cos^2\varphi = \\ &= ||\vec{a}||^2\,||\vec{b}||^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 = \\ &= (a_2^2b_3^2 + a_3^2b_2^2 + a_3^2b_1^2 + a_1^2b_3^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2) - \\ &\quad -2(a_2a_3b_2b_3 + a_1a_3b_1b_3 + a_1a_2b_1b_2). \end{aligned}$$

Dokazali smo torej, da velja

$$\boxed{||\vec{a} \times \vec{b}|| = ||\vec{a}||\,||\vec{b}|| \sin\varphi,}$$

kjer je $\varphi \in [0, \pi]$ kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$, oziroma, da je dolžina vektorskega produkta enaka ploščini paralelograma, ki je napet na vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

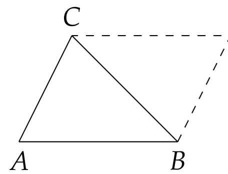
V posebnem nam to pravilo pove, kdaj je vektorski produkt dveh vektorjev enak $\vec{0}$. Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ je namreč enak $\vec{0}$ natanko tedaj, ko je njegova dolžina enaka 0, torej, ko je $||\vec{a}||\,||\vec{b}|| \sin\varphi =$

0. Torej natanko tedaj, ko je vektor $\vec{a}$ enak $\vec{0}$ ali je vektor $\vec{b}$ enak $\vec{0}$ ali pa je kot φ med njima tak, da velja $\sin\varphi = 0$, oziroma $\varphi = 0$ ali $\varphi = \pi$.

Za neničelna vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ velja, da $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ natanko takrat, kadar je $\vec{b} = \alpha\vec{a}$.

PRIMER 5.3.3. *Izračunaj ploščino trikotnika z oglišči $A(1,2,1)$, $B(-2,0,7)$ in $C(1,1,3)$.*

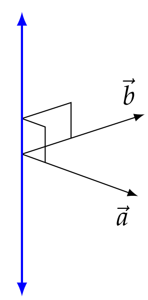
REŠITEV:



Ploščina trikotnika $\triangle ABC$ je enaka polovici ploščine paralelograma, napetega na vektorja $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{AC}$.

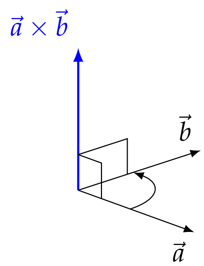
Ker je ploščina paralelograma, napetega na vektorja $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{AC}$, enaka dolžini vektorskega produkta $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$, je ploščina trikotnika $\triangle ABC$ tako enaka

$$\frac{1}{2}||\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|| = \frac{1}{2}\left|\left|\begin{bmatrix}-3\\-2\\6\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}0\\-1\\2\end{bmatrix}\right|\right| = \frac{1}{2}\left|\left|\begin{bmatrix}2\\6\\3\end{bmatrix}\right|\right| = \frac{\sqrt{49}}{2} = \frac{7}{2}.$$



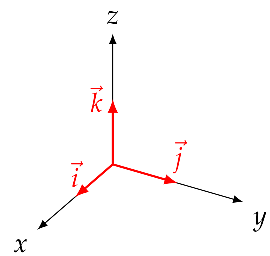
Doslej smo opisali premico, na kateri leži vektorski produkt vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ (premica je pravokotna tako na vektor $\vec{a}$ kot na vektor $\vec{b}$), ter dolžino vektorskega produkta $\vec{a} \times \vec{b}$ (dolžina je določena s ploščino paralelograma, napetega na vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$). Vendar obstajata dva vektorja, ki sta podana s takšnim opisom.

Iz definicije vektorskega produkta na strani 102 se je možno prepričati, da je vektorski produkt tisti izmed prej opisanih vektorjev, ki je določen s pravilom *desnosučnega vijaka*, oziroma *s pravilom desne roke*. Če sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ v skupni začetni legi, nam *pravilo desnosučnega vijaka* pravi, da se bo vijak, ki bi ga vrteli v smeri od konca vektorja $\vec{a}$ proti koncu vektorja $\vec{b}$, pomikal v smeri vektorskega produkta $\vec{a} \times \vec{b}$.



Morda si to pravilo lažje predstavljamo s *pravilom desne roke*. Ta pravi, da postavimo tri prste (palec, kazalec, sredinec) desne roke tako, da palec in kazalec iztegnjena ležita v ravnini dlani, sredinec pa iztegnemo pravokotno nanju. Če kaže vektor $\vec{a}$ v smeri palca in vektor $\vec{b}$ v smeri kazalca, potem vektorski produkt $\vec{a} \times \vec{b}$ kaže v smeri sredinca.

Oglejmo si opisane geometrijske lastnosti vektorskega produkta na primerih vektorjev $\vec{i}$, $\vec{j}$ in $\vec{k}$.



Vemo, da so vektorji $\vec{i}$, $\vec{j}$ in $\vec{k}$ paroma pravokotni enotski vektorji. Zato poljubna dva izmed trojice napenjata kvadrat s stranico 1. Velja torej:

$$\begin{array}{ll} \vec{i}\times\vec{j}=\vec{k} \qquad\qquad & \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k} \\ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i} & \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i} \\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j} & \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}. \end{array}$$

Iz pravila desnosučnega vijaka lahko sklepamo, da pri zamenjavi vrstnega reda vektorjev v vektorskem produktu kot rezultat dobimo vektor, ki kaže v nasprotno smer, oziroma

$$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}. \qquad \boxed{58}$$

Formalno lahko preverimo to lastnost tudi po definiciji, saj velja

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} a_3b_2 - a_2b_3 \\ a_1b_3 - a_3b_1 \\ a_2b_1 - a_1b_2 \end{bmatrix} = -\vec{b}\times\vec{a}.$$

Menjava vrstnega reda vektorjev v vektorskem produktu je torej bistveno drugačna lastnost od simetričnosti skalarnega produkta $\boxed{51}$.

Z nekaj tehničnega računanja se lahko prepričamo, da veljata tudi naslednji enakosti:

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c},$$
$$(\alpha\vec{a})\times\vec{b} = \alpha(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{a}\times(\alpha\vec{b}). \qquad \boxed{59}$$

Če primerjamo ti dve enakosti z $\boxed{52}$ in $\boxed{53}$, vidimo, da tudi za vektorski produkt veljata enaki lastnosti kot za skalarni produkt. Namreč, vektorjema je vseeno, ali ju najprej seštejemo in nato vektorsko pomnožimo z danim vektorjem, ali pa vsakega zase vektorsko pomnožimo z danim vektorjem in tako dobljena vektorja seštejemo. Prav tako vektorski produkt ni občutljiv na to, kateri faktor množimo z realnim številom. Dokazov tu ne bomo navajali.

5.3.3. Mešani produkt. Pokažimo najprej naslednjo zanimivo enakost, ki povezuje skalarni in vektorski produkt vektorjev:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}). \qquad \boxed{60}$$

Poračunajmo posebej levo in posebej desno stran enakosti za vektorje $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ in $\vec{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$. Leva stran željene enakosti je enaka

$$\begin{aligned}
(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} &= \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \\
&= (a_2b_3 - a_3b_2)c_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)c_3 = \\
&= a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 + a_1b_2c_3 - a_2b_1c_3,
\end{aligned}$$

desna pa

$$\begin{aligned}
\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) &= \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 \\ b_3c_1 - b_1c_3 \\ b_1c_2 - b_2c_1 \end{bmatrix} = \\
&= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) = \\
&= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1.
\end{aligned}$$

Hitro opazimo, da se vseh šest členov na levi in desni strani ujema.

Ker v enakosti $\boxed{60}$ nastopata oba doslej znana produkta vektorjev, desno (in zato tudi levo) stran te enakosti imenujemo *mešani produkt treh vektorjev* v $\mathbb{R}^3$.

Mešani produkt vektorjev $\vec{a}, \vec{b}$ in $\vec{c}$ je skalarni produkt vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b} \times \vec{c}$

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

Po lastnosti $\boxed{60}$ in že prej znanih lastnostih $\boxed{51}$ in $\boxed{58}$ velja tudi

$$\begin{aligned}
(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) &= (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = \\
= -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) &= -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}),
\end{aligned}$$

kar nam lahko občasno olajša računanje.

PRIMER 5.3.4. *Izračunaj mešana produkta $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ in $(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$ vektorjev*

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad in\ \vec{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

REŠITEV: *S preprostim izračunom dobimo, da velja*

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 8$$

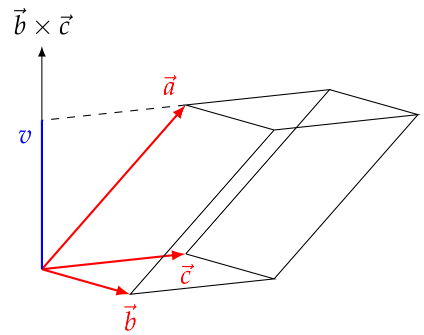
ter

$$(\vec{b},\vec{a},\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{c}) = \begin{bmatrix}1\\-2\\0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-4\\2\\2\end{bmatrix} = -8.$$

Mešani produkt vektorjev $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ je torej število, ki ga dobimo kot

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = ||\vec{a}||\,||\vec{b}\times\vec{c}||\cos\varphi,$$

kjer je φ kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}\times\vec{c}$.



Oglejmo si telo, napeto na vektorje $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$, katerega vsaka stranska ploskev je paralelogram. Takšno telo imenujemo *paralelepiped* ali poševna prizma. Njegov volumen je tako enak produktu ploščine osnovne ploskve in višine na osnovno ploskev, torej

$$V_{\vec{a},\vec{b},\vec{c}} = ||\vec{b}\times\vec{c}||\,v = ||\vec{b}\times\vec{c}||\,||\vec{a}||\,|\cos\varphi| = |(\vec{a},\vec{b},\vec{c})|.$$

S tem smo pokazali pomembno geometrijsko lastnost mešanega produkta.

> Mešani produkt $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ je po absolutni vrednosti enak prostornini paralelepipeda, ki ga napenjajo vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$.

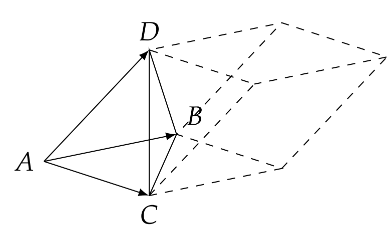
Iz te geometrijske interpretacije lahko sklepamo, da velja:

> Mešani produkt treh neničelnih vektorjev je enak 0 natanko tedaj, ko vsi trije ležijo v isti ravnini.

61

PRIMER 5.3.5. *Izračunaj prostornino tetraedra z oglišči* $A(1,-1,0)$, $B(3,2,1)$, $C(2,-3,0)$ *in* $D(1,0,-1)$.

REŠITEV: *Tetraeder* $ABCD$ *je tristrana piramida, zato je njen volumen enak* $\frac{1}{6}$ *volumna paralelepipeda, ki ga napenjajo vektorji* $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix}1\\-2\\0\end{bmatrix}$ *in* $\overrightarrow{AD} = \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$. *V primeru 5.3.4 smo izračunali mešani produkt vektorjev* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ *in tako sledi*

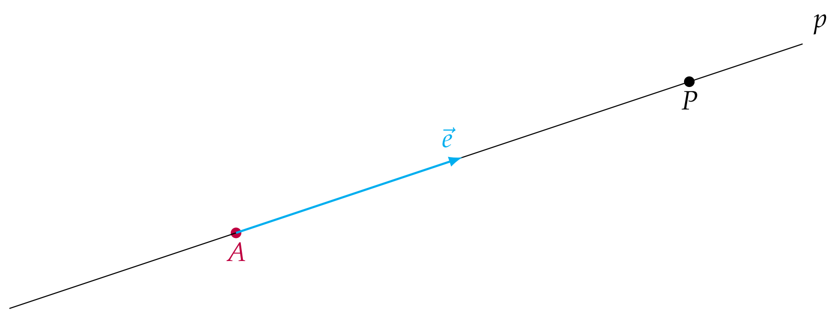


$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)\right| = \frac{4}{3}.$$

5.4. Ravnina in premica

S pomočjo vektorjev in operacij med njimi, ki smo jih spoznali, lahko zapišemo tudi enačbe premic in enačbe ravnin.

5.4.1. Premica v prostoru. Najprej si oglejmo, kako opišemo premico v prostoru. Če fiksiramo točko $A(a_1, a_2, a_3)$ in neničelni vektor $\vec{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$, potem je premica, ki vsebuje točko A in vektor $\vec{e}$, ena sama.



Za dano premico p vsak neničeln vektor $\vec{e}$, ki je vzporeden s premico, imenujemo *smerni vektor* premice p.

Oglejmo si, kako opišemo poljubno točko P na premici p s pomočjo dane točke A na premici in danega smernega vektorja $\vec{e}$. Točka P leži na premici p natanko tedaj, ko je vektor $\overrightarrow{AP}$ vzporeden vektorju $\vec{e}$, kar pomeni, da je

$$\overrightarrow{AP} = t\,\vec{e}$$

za nek $t \in \mathbb{R}$. To pomeni, da je $\vec{r}_P - \vec{r}_A = t\,\vec{e}$, oziroma

$$\vec{r}_P = \vec{r}_A + t\,\vec{e}.$$

S tem smo pridelali *vektorsko* obliko enačbe premice.

> Če je A točka na premici ter $\vec{e}$ njen smerni vektor, potem poljubno točko P na premici p opišemo kot
> $$p:\ \vec{r}_P = \vec{r}_A + t\,\vec{e},$$
> kjer je $t \in \mathbb{R}$.

Po komponentah to enakost zapišemo kot

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$

oziroma s tremi enačbami:

$$\begin{aligned} x &= a_1 + te_1 \\ y &= a_2 + te_2 \\ z &= a_3 + te_3. \end{aligned} \tag{14}$$

Če so vse tri komponente vektorja $\vec{e}$ različne od nič, lahko iz vsake enakosti v (14) posebej izrazimo parameter t kot $t = \frac{x-a_1}{e_1}$, $t = \frac{y-a_2}{e_2}$ in $t = \frac{z-a_3}{e_3}$. S tem smo dobili novo obliko enačbe premice, ki jo imenujemo *kanonična* oblika:

> Če je $A(a_1, a_2, a_3)$ točka na premici ter $\vec{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$ njen smerni vektor, potem poljubno točko $P(x, y, z)$ na premici p opišemo kot
> $$\frac{x-a_1}{e_1} = \frac{y-a_2}{e_2} = \frac{z-a_3}{e_3}.$$

Če je pri tem neka komponenta vektorja $\vec{e}$ enaka 0, parameter t v ustrezni enakosti v (14) ne nastopa, zato ga ne izrazimo. Če je na primer $e_2 = 0$, potem v kanonični obliki enačbe premice komponenta y nastopa v posebni enakosti kot $y = a_2$, za ostali dve komponenti pa velja $\frac{x-a_1}{e_1} = \frac{z-a_3}{e_3}$.

PRIMER 5.4.1. *Določi enačbi premic p in q, kjer p vsebuje točki $A(1, 2, 1)$ in $B(-1, 0, 2)$, premica q pa točki A in $C(2, -1, 1)$.*

REŠITEV: *Za smerni vektor premice p izberemo na primer vektor $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, za smerni vektor premice q pa vektor $\overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$. Obe premici gresta skozi točko A, zato sta vektorski obliki enačb premic p in q enaki*

$$p: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},\ t \in \mathbb{R}, \tag{15}$$

in

$$q: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix},\ s \in \mathbb{R}. \tag{16}$$

Če bi želeli zapisati kanonično obliko enačbe premice p, najprej zapišemo enačbo (15) *po komponentah*

$$\begin{aligned} x &= 1 - 2t \\ y &= 2 - 2t \\ z &= 1 + t \end{aligned}$$

in nato iz vsake izrazimo parameter t:

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{-2} = z - 1.$$

Podobno (16) *zapišemo po komponentah*

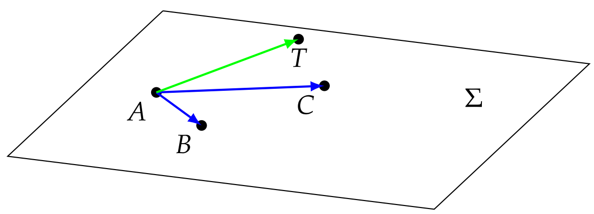
$$\begin{aligned} x &= 1+s \\ y &= 2-3s \\ z &= 1 \end{aligned}$$

in iz prvih dveh enakosti izrazimo s. Ker s v tretji enakosti ne nastopa, je spremenljivka z vedno enaka 1. Torej je kanonična oblika enačbe premice q enaka

$$x-1=\frac{y-2}{-3},\, z=1.$$

5.4.2. Ravnina v prostoru. Ravnina v $\mathbb{R}^3$ je natančno določena s tremi točkami, ki ležijo na njej. Običajno ravnine označujemo z velikimi grškimi črkami.

Na ravnini Σ izberimo točke A, B in C, ki ne ležijo na isti premici. Potem nadaljnja točka T leži v isti ravnini kot točke A, B in C natanko tedaj, ko vektorji $\overrightarrow{AT}$, $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{AC}$ ležijo v isti ravnini.



Ta pogoj je po lastnosti 61 ekvivalenten pogoju, da je mešani produkt vektorjev $\overrightarrow{AT}$, $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{AC}$ enak 0. Torej velja $(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AT}=0$, iz česar sledi

$$(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot(\vec{r}_T-\vec{r}_A)=0. \tag{17}$$

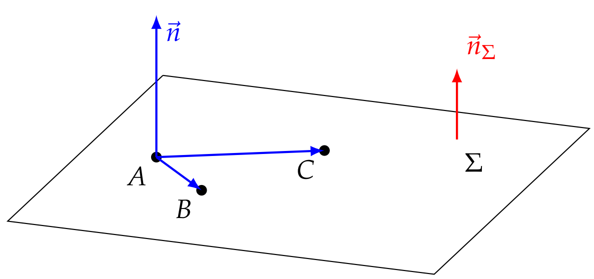
Vektor

$$\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$$

je pravokoten na vektorja $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{AC}$, torej na ravnino Σ.

> Neničeln vektor, ki je pravokoten na ravnino, imenujemo *normala* ravnine.

Normala ni ena sama, ampak jih je neskončno mnogo, vse so med seboj vzporedne, imajo pa različne dolžine. Običajno normalo na ravnino Σ označimo z $\vec{n}$ ali $\vec{n}_\Sigma$.



S tem enakost (17) postane

$$\vec{n} \cdot (\vec{r}_T - \vec{r}_A) = 0.$$

Kaj nam ta enakost pove po komponentah? Če je $\vec{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ in $d = \vec{n} \cdot \vec{r}_A$, potem morajo koordinate poljubne točke $T(x, y, z)$ na ravnini Σ zadoščati enačbi

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - d = 0,$$

oziroma

$$ax + by + cz = d.$$

Če je $\vec{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ normala na ravnino Σ ter A točka na ravnini Σ, potem je poljubna točka (x, y, z) na Σ določena z enačbo

$$\Sigma : ax + by + cz = d,$$

kjer je $d = \vec{n} \cdot \vec{r}_A$.

PRIMER 5.4.2. *Ugotovi, katere od točk A(0,1,-1), B(-1,2,-1), C(2,-1,2) ležijo na ravnini* $\Sigma : 2x + y - z = 1$. *Določi še vsaj dve točki, ki prav tako ležita na ravnini* Σ.

REŠITEV: *Na ravnini* Σ *ležijo tiste točke* (x, y, z), *ki zadoščajo enakosti* $2x + y - z = 1$. *Za točko A je leva stran enakosti enaka* $2 \cdot 0 + 1 - (-1) = 2$, *torej ne leži na* Σ. *Za točko B je leva stran enakosti enaka* $2 \cdot (-1) + 2 - (-1) = 1$, *za točko C pa* $2 \cdot 2 + (-1) - 2 = 1$, *zato obe, B in C, ležita na* Σ.

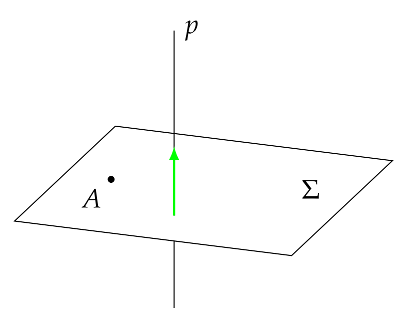
Nadaljnji točki D in E si lahko izberemo tako, da poljubno izberemo dve koordinati, tretjo pa izračunamo iz enačbe ravnine Σ. *Naj ležita torej* $D(0, 0, d)$ *in* $E(0, 13, e)$ *na* Σ. *Potem velja* $-d = 1$, *torej* $d = -1$ *ter* $13 - e = 1$, *torej* $e = 12$. *S tem smo dobili točki* $D(0, 0, -1)$ *ter* $E(0, 13, 12)$ *na ravnini* Σ.

PRIMER 5.4.3. *Določi enačbo ravnine* Σ, *ki vsebuje točko* $A(1, 2, 3)$ *in je pravokotna na premico* $p : \vec{r}_p = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

REŠITEV: *Če je ravnina* Σ *pravokotna na premico* p, *potem je vsak neničelni vektor, ki leži na premici* p, *tudi normala ravnine* Σ.

Izberimo torej smerni vektor $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$ *za normalo ravnine* Σ:

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$



Ker je A točka na ravnini, dobimo število d kot

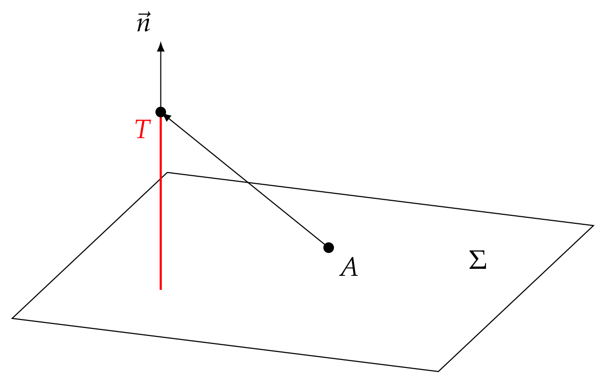
$$d = \vec{n} \cdot \vec{r}_A = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = -6.$$

Zato je enačba ravnine Σ *enaka*

$$\Sigma : x - 2y - z = -6.$$

Če je ravnina Σ določena s točko A in normalnim vektorjem $\vec{n}$, potem je razdalja točke T do ravnine Σ enaka dolžini pravokotne projekcije vektorja $\overrightarrow{AT}$ na normalo $\vec{n}$:

$$d(T,\Sigma) = \left| \frac{(\vec{r}_T - \vec{r}_A)\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right|. \qquad \boxed{62}$$



Pri tem je vrednost skalarnega produkta $(\vec{r}_T - \vec{r}_A)\cdot\vec{n}$ v števcu formule $\boxed{62}$ enaka 0 za točke, ki ležijo na ravnini Σ, pozitivna za vse točke, ki ležijo v tistem polprostoru glede na ravnino Σ, v katerega kaže normala $\vec{n}$, ter negativna za točke na drugem bregu ravnine.

PRIMER 5.4.4. *Piramida ima oglišča $A(3,1,1)$, $B(1,3,4)$, $C(-1,-1,1)$ in $D(3,-2,7)$. Določi višino piramide iz točke D.*

REŠITEV: *Trikotnik ABC leži na ravnini Σ, ki jo napenjajo točke A, B in C, zato je višina enaka razdalji točke D do ravnine Σ.*

Normala na ravnino Σ je vzporedna vektorju

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix}-2\\2\\3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-4\\-2\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\\-12\\12\end{bmatrix} = 6\begin{bmatrix}1\\-2\\2\end{bmatrix},$$

zato lahko za normalo ravnine Σ izberemo vektor $\vec{n} = \begin{bmatrix}1\\-2\\2\end{bmatrix}$. Izračunamo še $d = \vec{n}\cdot\vec{r}_A = 3$ in dobimo enačbo ravnine

$$\Sigma:\ x - 2y + 2z = 3.$$

Oddaljenost točke D od ravnine Σ izračunamo po formuli $\boxed{62}$ kot

$$d(D,\Sigma) = \left|\frac{(\vec{r}_D - \vec{r}_A)\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|}\right| = \frac{1}{3}\left|\begin{bmatrix}0\\-3\\6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\-2\\2\end{bmatrix}\right| = 6,$$

zatorej je višina iz oglišča D na stransko ploskev ABC enaka 6.

POGLAVJE 6

Matrike

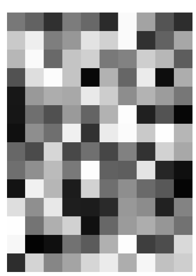
Ko enkrat znamo računati z vektorji v $\mathbb{R}^3$, se kaj hitro začnemo spraševati, ali znamo računati tudi s stolpci, ki imajo več kot tri komponente in mogoče celo z več stolpci naenkrat. Števila lahko uredimo v tabelo z več vrsticami in več stolpci, ki jih bomo imenovali *matrike*.

Matrike so osnovni gradnik področja matematike, ki ga imenujemo linearna algebra. Nepogrešljive so tudi v računalništvu, saj lahko z njihovo pomočjo med drugim konstruiramo in obdelujemo slike, animiramo 3D vizualizacije, z nekoliko več znanja pa lahko tudi prepoznavamo pisavo, obraze ali pa sestavimo 3D model iz fotografij obraza.

Na primer, matrika, katere elementi so realna števila z intervala $[0,1]$

$$\begin{bmatrix}
0.470 & 0.385 & 0.190 & 0.486 & 0.407 & 0.172 & 0.979 & 0.640 & 0.331 & 0.178 \\
0.786 & 0.934 & 0.496 & 0.592 & 0.888 & 0.819 & 0.979 & 0.195 & 0.384 & 0.653 \\
0.719 & 0.979 & 0.412 & 0.769 & 0.813 & 0.476 & 0.509 & 0.809 & 0.717 & 0.366 \\
0.322 & 0.870 & 0.988 & 0.769 & 0.033 & 0.699 & 0.400 & 0.922 & 0.053 & 0.679 \\
0.094 & 0.599 & 0.679 & 0.660 & 0.911 & 0.803 & 0.553 & 0.703 & 0.610 & 0.466 \\
0.087 & 0.437 & 0.313 & 0.603 & 0.394 & 0.696 & 0.991 & 0.128 & 0.327 & 0.024 \\
0.064 & 0.558 & 0.436 & 0.938 & 0.196 & 0.921 & 0.984 & 0.786 & 0.993 & 0.712 \\
0.403 & 0.297 & 0.839 & 0.285 & 0.438 & 0.277 & 0.506 & 0.196 & 0.822 & 0.659 \\
0.437 & 0.561 & 0.732 & 0.474 & 0.991 & 0.380 & 0.369 & 0.893 & 0.151 & 0.061 \\
0.078 & 0.943 & 0.715 & 0.111 & 0.822 & 0.438 & 0.556 & 0.418 & 0.345 & 0.022 \\
0.871 & 0.561 & 0.909 & 0.119 & 0.110 & 0.168 & 0.598 & 0.548 & 0.132 & 0.515 \\
0.993 & 0.456 & 0.686 & 0.817 & 0.066 & 0.404 & 0.606 & 0.677 & 0.589 & 0.448 \\
0.968 & 0.0127 & 0.061 & 0.446 & 0.359 & 0.688 & 0.989 & 0.246 & 0.304 & 0.852 \\
0.180 & 0.830 & 0.524 & 0.645 & 0.838 & 0.919 & 0.680 & 0.962 & 0.756 & 0.807
\end{bmatrix}$$

s štirinajstimi vrsticami in desetimi stolpci, nam predstavlja bitno sliko:



v kateri število 0 predstavlja črno polje, število 1 pa belo. S preprostimi matričnimi operacijami lahko sliko posvetlimo ali potemnimo. Iz večih takšnih slik pa prepoznavamo njihove skupne lastnosti.

6.1. Osnovni pojmi in lastnosti matrik

6.1.1. Definicija. V splošnem ima matrika poljubno število vrstic in stolpcev, njeni elementi pa so poljubna realna števila.

Matrika velikosti $m \times n$ je pravokotna tabela števil z m vrsticami in n stolpci

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Na kratko jo bomo zapisali tudi

$$\left[a_{ij}\right].$$

Matrike bomo označevali z velikimi tiskanimi črkami in za matriko A realnih števil velikosti $m \times n$ bomo pisali

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Matriko sestavljeno iz samih ničel bomo imenovali *ničelna matrika* in jo označili z

$$0 = [0] \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

V Poglavju 5 smo se naučili računati z matrikami z enim stolpcem in tremi vrsticami. Matrike, ki imajo en sam stolpec, imenujemo *stolpec*. Matriko z eno samo vrstico pa imenujemo *vrstica*. Matrika je *kvadratna*, če ima enako število vrstic in stolpcev.

Matriki $A = \left[a_{ij}\right] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ in $B = \left[b_{ij}\right] \in \mathbb{R}^{p \times q}$ *sta enaki* natanko tedaj, ko

(1) imata enako število vrstic ($m = p$),
(2) imata enako število stolpcev ($n = q$) in
(3) se ujemajo njuni istoležni elementi ($a_{ij} = b_{ij}$ za vsak $i = 1, \ldots, m$ in $j = 1, \ldots, n$).

6.1.2. Seštevanje, množenje s številom in transponiranje. Najprej definirajmo operaciji seštevanja matrik in množenja matrik s števili, ki nam posplošujeta operaciji seštevanja vektorjev in množenja vektorjev s števili.

Vsota matrik $A = \left[a_{ij}\right] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ in $B = \left[b_{ij}\right] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je matrika

$$A + B = \left[a_{ij} + b_{ij}\right] \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Torej dobimo vsoto matrik tako, da seštejemo istoležne elemente matrik. Pri tem pazimo na to, da lahko seštevamo le matrike istih velikosti. Podobno definiramo produkt matrike s številom, kjer vsak element matrike pomnožimo z danim številom.

Produkt matrike $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *s številom* $\alpha \in \mathbb{R}$ je matrika

$$\alpha A = [\alpha a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}.$$

Pri tem bomo produkt matrike A s številom -1 pisali krajše tudi kot $-A = (-1)A$ in zatorej lahko definiramo tudi razliko dveh matrik kot

$$A - B = A + (-B).$$

Včasih nam bo ustrezalo, da bomo zamenjali vlogi vrstic in stolpcev v matriki. To pomeni, da bomo stolpce matrike prepisali po vrsticah v novo matriko, ki jo bomo imenovali *transponirana matrika*. Takšno operacijo imenujemo *transponiranje*.

Transponirana matrika matrike $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je matrika

$$A^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times m}.$$

Transponirana matrika stolpca je torej vrstica in transponirana matrika vrstice je stolpec.

PRIMER 6.1.1. *Izračunaj tiste izraze izmed* A^{T}, $-A$, $2A$, $A+B$, $A+C$, $A+C^{\mathsf{T}}$, $A-C^{\mathsf{T}}$ *in* $(2A-B)^{\mathsf{T}}+3C$, *ki jih je mogoče izračunati za matrike*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}\ \text{in}\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

REŠITEV: *Paziti moramo na to, da lahko seštevamo le matrike istih velikosti. Torej vsote* $A+C$ *ne moremo izračunati. Vse ostale izraze s seznama pa lahko, in sicer velja:*

$$A^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad -A = (-1)A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$2A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 8 \end{bmatrix} \qquad A+B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A+C^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 8 \end{bmatrix} \qquad A-C^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(2A-B)^{\mathsf{T}}+3C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -3 & 4 & 7 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 9 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 8 & 13 \\ -3 & 19 \end{bmatrix}.$$

Lastnosti seštevanja matrik in množenja matrik s številom so enake kot v primeru seštevanja vektorjev in množenja vektorjev s števili, kot na primer tiste s strani 90 in 92. Vse lastnosti lahko neposredno preverimo z računanjem izrazov po elementih. Tako za seštevanje matrik istih velikosti velja, da lahko njihov vrstni red poljubno menjamo $A + B = B + A$ in $A + (B + C) = (A + B) + C$. Ničelna matrika posplošuje število 0 in velja $A + 0 = A$. Za množenje matrik pa velja tudi $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$, $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ in $\alpha(A + B) = \alpha A + \beta B$ za vse $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ter poljubni števili $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Kaj pa lahko zanimivega povemo o transponiranju matrik? Če matriko dvakrat transponiramo, potem dvakrat zamenjamo vlogi vrstic in stolpcev, kar pomeni, da dobimo nazaj originalno matriko:

$$\boxed{(A^\mathsf{T})^\mathsf{T} = A.}$$

Ker seštevanje matrik poteka po komponentah, za matriki $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ velja $(A + B)^\mathsf{T} = [a_{ij} + b_{ij}]^\mathsf{T} = [a_{ji} + b_{ji}] = [a_{ji}] + [b_{ji}] = [a_{ij}]^\mathsf{T} + [b_{ij}]^\mathsf{T}$, ali krajše:

$$\boxed{(A + B)^\mathsf{T} = A^\mathsf{T} + B^\mathsf{T}.}$$

Podobno se prepričamo, da velja tudi $(\alpha A)^\mathsf{T} = [\alpha a_{ij}]^\mathsf{T} = [\alpha a_{ji}] = \alpha\,[a_{ji}] = \alpha\,[a_{ij}]^\mathsf{T}$. S tem smo pokazali, da lahko menjamo tudi vrstni red transponiranja in množenja s skalarjem:

$$\boxed{(\alpha A)^\mathsf{T} = \alpha A^\mathsf{T}.}$$

6.1.3. Produkt matrik. Produkt matrik je posplošitev skalarnega produkta vektorjev. Matriki $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $B \in \mathbb{R}^{q\times p}$ lahko zmnožimo le, če je število stolpcev prve matrike enako številu vrstic druge matrike ($n = q$). Produkt matrik A in B je matrika, ki ima toliko vrstic m kot ima vrstic prva matrika in toliko stolpcev p kot ima stolpcev druga matrika.

Na primer, produkt 5×4 matrike A in 4×3 matrike B je 5×3 matrika $C = A \cdot B$.

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} * & * & b_{13} \\ * & * & b_{23} \\ * & * & b_{33} \\ * & * & b_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & c_{23} \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

Pri tem je na primer element matrike C v drugi vrstici in tretjem stolpcu enak

$$c_{23} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} + a_{24}b_{43}.$$

V elementu c_{23} opazimo posplošitev skalarnega produkta vektorjev s štirimi komponentami. Prvi je dobljen iz druge vrstice matrike A, drugi pa iz tretjega stolpca matrike B. Na takšen način izračunamo vsakega od elementov matrike produkta $A \cdot B$, ki ga bomo raje označevali z AB.

Produkt AB matrik $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ je matrika C velikosti $m \times p$, katere element c_{ij} izračunamo kot
$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

PRIMER 6.1.2. *Za matrike*
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -6 \end{bmatrix} \text{ in } C = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$
izračunaj tiste izmed produktov AB, BA, AC in CA, ki jih je mogoče izračunati.

REŠITEV: *Ker ima matrika A tri stolpce, matrika B pa tri vrstice, lahko izračunamo produkt AB. Ta je enak*
$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -6 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1\cdot 4+2\cdot 1+3\cdot(-1) & 1\cdot 5+2\cdot(-2)+3\cdot 2 & 1\cdot 3+2\cdot 0+3\cdot(-6) \\ 4\cdot 4+5\cdot 1+6\cdot(-1) & 4\cdot 5+5\cdot(-2)+6\cdot 2 & 4\cdot 3+5\cdot 0+6\cdot(-6) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 7 & -15 \\ 15 & 22 & -24 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$
Produkta BA ne moremo izračunati, ker se ne ujema število stolpcev matrike B (ki je enako 3) s številom vrstic matrike A (ki je enako 2). Prav tako ne moremo izračunati produkta CA, saj ima matrika C le en stolpec, medtem ko ima matrika A dve vrstici.

Lahko pa izračunamo produkt AC, ki je enak
$$AC = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1+2\cdot 4+3\cdot(-2) \\ 4\cdot 1+5\cdot 4+6\cdot(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

Oglejmo si nekaj lastnosti množenja matrik, na katere moramo biti zelo pozorni. Če zmnožimo neničelni matriki, je njun produkt lahko ničelna matrika:
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$
kar se na primer pri množenju realnih števil ne more zgoditi.

Tudi, če lahko izračunamo produkt matrik A in B, v splošnem ne velja, da bi bil produkt AB enak produktu BA. Na primer,
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \text{ in } \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$
Zato moramo vselej paziti, v katerem vrstnem redu množimo matrike.

Poleg tega za matrike ne velja pravilo krajšanja. Izberimo matrike $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ in $C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. Če izračunamo produkta

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

in

$$AC = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

opazimo, da velja $AB = AC$. A v tej enakosti ne smemo krajšati matrike A na obeh straneh, saj se matriki B in C razlikujeta. Torej pravilo krajšanja, ki ga dobro poznamo in uporabljamo pri računanju z realnimi števili, za matrike ne velja.

Prepričajmo se, da je matrično množenje *asociativno*, kar pomeni, da velja

$$A(BC) = (AB)C \qquad \boxed{63}$$

za matrike $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times p}$ in $C = [c_{ij}] \in \mathbb{R}^{p\times r}$. Element v i-ti vrstici in j-tem stolpcu matrike $A(BC)$ je enak

$$(A(BC))_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(BC)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \sum_{l=1}^{p} b_{kl}c_{lj} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} a_{ik}b_{kl}c_{lj},$$

hkrati pa je element v i-ti vrstici in j-tem stolpcu matrike $(AB)C$ enak

$$((AB)C)_{ij} = \sum_{l=1}^{p} (AB)_{il}c_{lj} = \sum_{l=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kl}c_{lj},$$

iz česar sledi $\boxed{63}$. Zaradi lastnosti asociativnosti množenja lahko torej za kvadratno matriko $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ rekurzivno definiramo njene potence.

Za kvadratno matriko $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ njene potence rekurzivno definiramo kot:

$$\begin{aligned} A^1 &= A, \\ A^n &= AA^{n-1} \end{aligned}$$

PRIMER 6.1.3. *Izračunaj vrednost izraza $A^4 + 2A^2$ za matriko $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.*

REŠITEV: *Najprej poračunajmo potence matrike A:*

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad A^4 = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Sledi, da je

$$A^4 + 2A^2 = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

Podobno se prepričamo, da veljata distributivnostna zakona, ki povezujeta seštevanje in množenje matrik:

$$(A+B)C = AC + BC$$

$$A(B+C) = AB + AC$$

Zopet pokažimo, da sta element v i-ti vrstici in j-tem stolpcu matrike $(A+B)C$ in element v i-ti vrstici in j-tem stolpcu matrike $AC+BC$ enaka, kjer je $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $C = [c_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times p}$. Velja namreč:

$$\begin{aligned}((A+B)C)_{ij} &= \sum_{k=1}^{n}(A+B)_{ik}c_{kj} = \sum_{k=1}^{n}(a_{ik}+b_{ik})c_{kj} = \\ &= \sum_{k=1}^{n}(a_{ik}c_{kj}+b_{ik}c_{kj}) = \sum_{k=1}^{n}a_{ik}c_{kj} + \sum_{k=1}^{n}b_{ik}c_{kj} = \\ &= (AC)_{ij} + (BC)_{ij} = (AC+BC)_{ij}\end{aligned}$$

iz česar sledi prvi izmed obeh distributivnostnih zakonov. Dokaz drugega od distributivnostnih zakonov bomo izpustili.

Preverimo še, kaj je transponirana matrika produkta AB. Njen element v i-ti vrstici in j-tem stolpcu je enak

$$((AB)^{\mathsf{T}})_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki} = \sum_{k=1}^{n}(B^{\mathsf{T}})_{ik}(A^{\mathsf{T}})_{kj} = (B^{\mathsf{T}}A^{\mathsf{T}})_{ij}$$

in zato velja:

$$(AB)^{\mathsf{T}} = B^{\mathsf{T}}A^{\mathsf{T}}.$$

Med vsemi kvadratnimi matrikami izpostavimo matriko, ki množi tako, kot to dela število 1 med realnimi števili

Identična matrika I_n (ali *identiteta*) je kvadratna matrika $I_n = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ki ima na diagonalnih elementih a_{ii} enice, izven diagonale pa same ničle:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Poglejmo, kaj se zgodi, če matriko $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ množimo z matriko $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.
Produkta I_3A in AI_3 sta enaka:

$$\begin{aligned} I_3A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = A \\ AI_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = A. \end{aligned}$$

Lahko se je prepričati, da tudi v splošnem velja, da se matrika ne spremeni, če jo množimo z identično matriko. Namreč, za vsako matriko $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ velja:

$$AI_n = A \text{ in } I_mA = A.$$

6.2. Sistemi linearnih enačb

6.2.1. Definicija. Med enačbami je najlažje reševati tiste, v katerih neznanke nastopajo v prvi potenci, na primer

$$2x = 3.$$

Takšni enačbi pravimo *linearna enačba*. Če namesto ene neznanke vzamemo tri x, y, z in jih povežemo v linearno enačbo

$$2x + y - z = 3,$$

nam množica rešitev te linearne enačbe predstavlja neko ravnino v prostoru $\mathbb{R}^3$.

Množico linearnih enačb:

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 5 \\ x - 2y + z &= -4 \end{aligned}$$

imenujemo *sistem linearnih enačb*. Geometrijsko je množica rešitev dveh linearnih enačb s tremi neznankami presek dveh ravnin v $\mathbb{R}^3$, ki jih ti dve enačbi določata. Ker je presek dveh ravnin lahko ravnina, premica ali pa je presek prazen.

V tem razdelku se bomo naučili, kako v splošnem reševati velike sisteme enačb in obravnavati število njihovih rešitev.

Sistem m linearnih enačb z n neznankami je množica enačb

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3 \\ \vdots \qquad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{18}$$

PRIMER 6.2.1. *Poišči rešitev sistema enačb*

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= -4 \\ 2x + y - z &= 5. \end{aligned}$$

REŠITEV: *Če obe enačbi seštejemo, iz dveh enačb s po tremi neznankami dobimo enačbo*

$$3x - y = 1$$

z dvema neznankama, iz katere lahko izrazimo $y = 3x - 1$. *Če tako dobljeno zvezo vstavimo v drugo enačbo danega sistema enačb, lahko iz nje izrazimo tudi* $z = 2x + y - 5 = 2x + (3x - 1) - 5 = 5x - 6$. *S tem smo kot rešitev sistema enačb dobili vse trojice števil*

$$x,\ y = 3x - 1,\ z = 5x - 6,$$

pri čemer je x poljubno realno število.

Geometrijsko, presek ravnin, ki ju določata enačbi danega sistema, je premica, ki je vektorsko podana kot

$$x = t,\ y = 3t - 1,\ z = 5t - 6,$$

kjer je $t \in \mathbb{R}$.

Če želimo sistem enačb (18) označiti bolj kompaktno, zapišemo matriko, sestavljeno iz koeficientov pred neznankami $x_1, x_2, \ldots, x_n$, kot

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}.$$

Matriko A imenujemo *matrika sistema* (18). Poleg tega neznanke zložimo v stolpec $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, proste koeficiente na desni strani pa v stolpec $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, ki ga imenujemo *desna stran sistema*:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \text{in} \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Pri danih neznankah $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nam matrika sistema $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in desna stran sistema $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ nosita vse informacije o sistemu linearnih enačb.

Sedaj opazimo, da so leve strani sistema (18) natanko vrstice produkta $A\vec{x}$ in zato je sistem linearnih enačb (18) po komponentah zapisana matrična enakost:

$$A\vec{x} = \vec{b}.$$

6.2.2. Gaussova eliminacija. Velike sisteme enačb je vedno dobro reševati tako, da jih preoblikujemo v ekvivalenten sistem, ki ima manj enačb in manj neznank. A v splošnem se lahko pri reševanju velikih sistemov brez algoritma, kako to sistematično narediti, kaj hitro izgubimo. Zato si oglejmo učinkovit algoritem, kako reševati sisteme linearnih enačb.

Vemo že, da s seštevanjem dveh enačb dobimo novo enačbo, kateri prav tako ustrezajo rešitve prvotnega sistema enačb. Jasno je, da se rešitve sistema enačb ne spremenijo, če

(E1) v sistemu dve enačbi med sabo zamenjamo,
(E2) eni enačbi prištejemo večkratnik druge,
(E3) poljubno enačbo pomnožimo z neničelnim številom.

Ko izvajamo takšne operacije na enačbah sistema linearnih enačb, se nam spreminjajo tako koeficienti na levi strani kot na desni strani enačb v sistemu. Videli smo, da lahko vse podatke o sistemu strnemo v matriki A in $\vec{b}$. Najbolj praktično bo, da bomo matriki $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $\vec{b} \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ tako zložili v eno samo matriko velikosti $m \times (n+1)$, da bomo matriki A dodali še stolpec $\vec{b}$. Tako sestavljeno matriko bomo označili z

$$\left[\, A \,|\, \vec{b} \,\right]$$

in jo imenovali razširjena matrika sistema. Tako bomo lahko operacije (E1), (E2) in (E3) izvajali na razširjeni matriki sistema.

Rešitve sistema linearnih enačb $A\vec{x} = \vec{b}$ se ne spremenijo, če v razširjeni matriki sistema $\left[\, A \,|\, \vec{b} \,\right]$:

(E1) med seboj zamenjamo dve vrstici,
(E2) posamezni vrstici prištejemo večkratnik neke druge vrstice,
(E3) vrstico pomnožimo z neničelnim realnim številom.

S temi operacijami, ki jih bomo imenovali *elementarne operacije*, lahko naš sistem poljubno polepšamo. Neznanke iz enačb najlažje izrazimo, če je kar največ koeficientov v sistemu enakih 0. Naš cilj je z elementarnimi operacijami na razširjeni matriki sistema sistematično pridelati čim več ničel pod diagonalo, torej na mestih a_{ij}, kjer je $j < i$.

PRIMER 6.2.2. *Zapiši razširjeno matriko sistema*

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= -4 \\ 2x + y - z &= 5 \\ 3x - y + z &= 0 \end{aligned}$$

in jo s pomočjo elementarnih operacij prevedi na obliko, ki ima pod diagonalo same ničle.

REŠITEV: *Razširjena matrika sistema je enaka*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

V njej uporabimo enico v prvem stolpcu:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \qquad \begin{aligned} x - 2y + z &= -4 \\ 2x + y - z &= 5 \\ 3x - y + z &= 0, \end{aligned}$$

da s prvo vrstico in operacijo (E2) pridobimo pod to enico same ničle. To naredimo v dveh korakih: najprej drugi vrstici prištejemo (-2)*-kratnik prve vrstice*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 5 & -3 & 13 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \qquad \begin{aligned} x - 2y + z &= -4 \\ 5y - 3z &= 13 \\ 3x - y + z &= 0, \end{aligned}$$

nato pa še tretji vrstici prištejemo (-3)*-kratnik prve vrstice:*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 5 & -3 & 13 \\ 0 & 5 & -2 & 12 \end{array}\right] \qquad \begin{aligned} x - 2y + z &= -4 \\ 5y - 3z &= 13 \\ 5y - 2z &= 12. \end{aligned}$$

V tako preurejenem sistemu linearnih enačb nam neznanka x nastopa le v prvi enačbi. S tem smo zmanjšali število neznank v zadnjih dveh enačbah. Sedaj postopek ponovimo na njih. Uporabimo koeficient 5 pred neznanko y v drugi enačbi, da z njo izničimo neznanko y v zadnji enačbi.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 5 & -3 & 13 \\ 0 & 5 & -2 & 12 \end{array}\right]$$

V ta namen zadnji vrstici prištejmo minus drugo vrstico:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 5 & -3 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{rcr} x - 2y + z & = & -4 \\ 5y - 3z & = & 13 \\ z & = & -1. \end{array}$$

Iz tako dobljenega sistema hitreje izračunamo rešitev sistema enačb. Iz tretje enačbe razberemo, da je

$$z = -1.$$

To vstavimo v drugo enačbo, iz katere dobimo

$$5y = 13 + 3z = 10,$$

torej $y = 2$. Nato pa iz prve izračunamo

$$x = -4 + 2y - z = 1.$$

Na primeru smo videli, kako lahko na razširjeni matriki sistema po stolpcih od leve proti desni pridobimo pod diagonalo same ničle. To naredimo tako, da

- v prvem stolpcu izberemo neničelni element,
- ga z (E1) po potrebi prestavimo v prvo vrstico in
- z operacijami (E2) z njegovim večkratnikom izničimo ostale koeficiente v prvem stolpcu.

Nato postopek ponovimo na manjši matriki, ki vsebuje vse vrstice razen prve in vse stolpce razen prvega. Splošni algoritem imenujemo *Gaussova eliminacija* in temelji na zaporednem izločevanju neznank z operacijami (E1), (E2) in (E3).

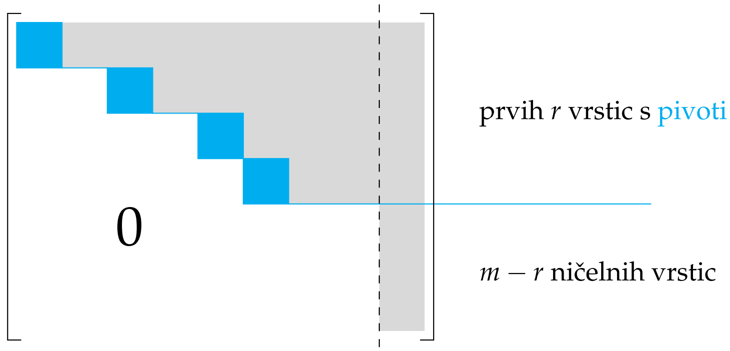
Z Gaussovo eliminacijo lahko iz poljubne matrike A pridobimo *vrstično stopničasto obliko*, ki ima naslednji lastnosti:

(1) za nek $r \geq 0$ je prvih r vrstic matrike neničelnih, zadnjih $m - r$ vrstic pa ima same ničle,
(2) v prvih r neničelnih vrsticah imenujemo najbolj levi neničelni element vsake vrstice *pivot* in če opazujemo dve zaporedni vrstici, je pivot v spodnji vrstici bolj desno od pivota v zgornji vrstici.

Pri tem se izkaže, da je število pivotov r neodvisno od zaporedja operacij (E1), (E2), (E3), ki jih izvajamo na matriki A. To število imenujemo *rang* matrike A.

Rang matrike A je število pivotov, ki jih dobimo v vrstični stopničasti obliki po Gaussovem postopku na matriki A, torej številu neničelnih vrstic v vrstični stopničasti obliki matrike A.
Rang matrike A bomo označili z $\mathrm{rang}(A)$.

Ko rešujemo sistem enačb $A\vec{x} = \vec{b}$, je naš cilj z Gaussovo eliminacijo iz razširjene matrike sistema $\left[A \middle| \vec{b}\right]$ pridobiti na podmatriki A vrstično stopničasto obliko.



To pomeni, da z Gaussovo eliminacijo lahko iz razširjene matrike sistema v končno korakih z uporabo operacij (E1), (E2) in (E3) na koncu postopka dobimo matriko v vrstično stopničasti obliki:

$$\left[\begin{array}{cccccccccc|c}
p_{1k_1} & * & \ldots & * & \ldots & * & \ldots & * & \ldots & * & * \\
0 & 0 & \ldots & p_{2k_2} & \ldots & * & \ldots & * & \ldots & * & * \\
0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & p_{3k_3} & \ldots & * & \ldots & * & * \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & p_{rk_r} & \ldots & * & * \\
0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & * \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & *
\end{array}\right],$$

kjer so $p_{1k_1}, p_{2k_2}, \ldots, p_{rk_r}$ pivoti vrstične stopničaste oblike razširjene matrike. Ker je pivotov natanko r, je rang matrike A enak r.

Oglejmo si, kaj nam pove zadnjih $m-r$ enačb, kjer je r rang matrike A. Vse leve strani zadnjih $m-r$ enačb so enake 0. Če bi bila vsaj ena $*$ na desni strani v zadnjih $m-r$ vrsticah neničelna, torej, če bi v razširjeni matriki sistema obstajal en pivot več kot v matriki sistema A, bi dobili protislovno enačbo. To bi pomenilo, da sistem nima rešitev. V nasprotnem, če so vse desne strani zadnjih $m-r$ enačb enake 0, pa je vsaka od zadnjih $m-r$ enačb tavtologija oblike $0=0$, torej je gotovo izpolnjena pri poljubni izbiri vrednosti $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Zato jih lahko izpustimo pri iskanju rešitev. S tem smo ugotovili naslednje:

> Sistem m linearnih enačb z n neznankami je rešljiv natanko tedaj, ko je rang matrike sistema enak rangu razširjene matrike sistema.

PRIMER 6.2.3. *Ali ima sistem enačb*

$$\begin{aligned}
x + 2z &= 1 \\
-x + 2y + z + w &= 0 \\
x - y - z + w &= -1 \\
x + y + 3z + w &= -1
\end{aligned}$$

rešitev?

REŠITEV: *Razširjena matrika sistema je enaka*

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

Uporabimo postopek Gaussove eliminacije in jo preoblikujmo v vrstično stopničasto obliko. Pod matriko bomo zapisali operacije, ki jih bomo naredili. Pri tem bo simbol $v_2 \rightsquigarrow v_2 + v_1$ *pomenil, da bomo v naslednjem koraku drugi vrstici prišteli prvo vrstico.*

$$\underset{\substack{v_2 \rightsquigarrow v_2+v_1 \\ v_3 \rightsquigarrow v_3-v_1 \\ v_4 \rightsquigarrow v_4-v_1}}{\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right]} \longrightarrow \underset{\substack{v_2 \rightsquigarrow v_4 \\ v_4 \rightsquigarrow v_2}}{\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right]} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \underset{\substack{v_3 \rightsquigarrow v_3+v_2 \\ v_4 \rightsquigarrow v_4-2v_2}}{\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right]} \longrightarrow \underset{v_3 \rightsquigarrow -\frac{1}{2}v_3}{\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right]} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \underset{v_4 \rightsquigarrow v_4-v_3}{\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right]} \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \longrightarrow$$

Rang matrike A je enak 3, saj imamo v matriki A (levo od črte, ki razmejuje matriko sistema in desno stran sistema) tri pivote oziroma tri neničelne vrstice v vrstično stopničasti obliki. Če pa si ogledamo celotno razširjeno matriko v vrstično stopničasti obliki, pa opazimo, da ima štiri neničelne vrstice, torej je njen rang enak 4. Zatorej

$$\operatorname{rang} A = 3$$

in

$$\operatorname{rang}\left[\, A \mid \vec{b} \,\right] = 4$$

in dani sistem linearnih enačb ni rešljiv.

Če ugotovimo, da sistem nima rešitev, se ne splača več truditi z njim. Če pa je sistem rešljiv, lahko vrstično stopničasto obliko matrike še bolj poenostavimo in pridobimo v razširjeni matriki sistema še mnogo ničel nad diagonalo, in sicer nad vsakim pivotom. Nadaljujemo s postopkom podobnim Gaussovi eliminaciji, ki ga imenujemo tudi *Gauss-Jordanova eliminacija*:

začnemo z najbolj desnim pivotom v vrstično stopničasti obliki matrike A, ki ga uporabimo, da izničimo vse elemente nad njim. Nato pa nadaljujemo z istim postopkom s pivoti proti levi in tako prvih r vrstic matrike preoblikujemo v matriko oblike:

$$\left[\begin{array}{cccccccccccc|c} p_{11} & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * & 0 & * & 0 & * & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & p_{2k} & * & \dots & * & 0 & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & & \dots & 0 & \dots & & 0 & p_{3l} & \dots & 0 & \dots & * \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & & & 0 & \dots & & \dots & & 0 & p_{rs} & \dots & * \end{array}\right].$$

Pravimo, da je takšna matrika v *reducirani vrstično stopničasti obliki*. Ta se od vrstično stopničaste oblike razlikuje po tem, da neznanke, ki nastopajo v pivotih, ne nastopajo v nobeni drugi enačbi, kar pomeni, da jih lahko preprosto izrazimo. Takim neznankam, ki pripadajo pivotnim stolpcem, pravimo *glavne neznanke*. Ostalim neznankam pa pravimo *proste neznanke*.

PRIMER 6.2.4. *Reši sistem*

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= -4 \\ 2x + y - z &= 5 \\ 3x - y + z &= 0 \end{aligned}$$

s pomočjo zapisa razširjene matrike v reducirano vrstično stopničasto obliko.

REŠITEV: *V primeru 6.2.2 smo zapisali matriko in sistem v vrstični stopničasti obliki kot:*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 5 & -3 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \qquad \begin{aligned} x - 2y + z &= -4 \\ 5y - 3z &= 13 \\ z &= -1. \end{aligned}$$

Sedaj začnimo postopek pridobivanja ničel nad diagonalo. Najprej uporabimo zadnjo vrstico, da pridobimo ničle nad zeleno enico v tretjem stolpcu. Najprej 3-kratnik tretje vrstice prištejemo drugi vrstici:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \qquad \begin{aligned} x - 2y + z &= -4 \\ 5y &= 10 \\ z &= -1, \end{aligned}$$

nato pa še (-1)-kratnik tretje vrstice prvi vrstici:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \qquad \begin{aligned} x - 2y &= -3 \\ 5y &= 10 \\ z &= -1. \end{aligned}$$

Sedaj lahko drugo vrstico delimo s 5

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \qquad \begin{aligned} x - 2y &= -3 \\ y &= 2 \\ z &= -1 \end{aligned}$$

in z uporabo enice v drugi vrstici pridobimo nad njo ničlo tako, da prvi vrstici prištejemo 2-kratnik druge vrstice:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \qquad \begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 2 \\ z &= -1. \end{aligned}$$

S tem smo dobili sistem enačb, iz katerega nadvse preprosto razberemo rešitev: $x = 1$, $y = 2$ *in* $z = -1$.

Oglejmo si primer, ko sistem linearnih enačb nima le ene rešitve.

PRIMER 6.2.5. *Poišči rešitve sistema linearnih enačb*

$$\begin{aligned} x + 2y &= 5 \\ -x - y + z &= -4 \\ 2x + y - 3z &= 7. \end{aligned}$$

REŠITEV: *Zapišimo razširjeno matriko sistema*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 \\ -1 & -1 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & -3 & 7 \end{array}\right]$$

in najprej s pomočjo Gaussovega postopka preoblikujmo matriko v vrstično stopničasto obliko.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 \\ -1 & -1 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & -3 & 7 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} v_2 &\rightsquigarrow v_2 + v_1 \\ v_3 &\rightsquigarrow v_3 - 2v_1 \end{aligned} \qquad\qquad v_3 \rightsquigarrow v_3 + 3v_2$$

Opazimo, da je rang matrike enak 2, prav tako kot rang razširjene matrike. Zato je sistem rešljiv, torej ga preoblikujmo v reducirano vrstično stopničasto obliko.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$v_1 \rightsquigarrow v_1 - 2v_2$$

Pivota, ki se pojavljata v prvih dveh stolpcih, pripadata neznankama x in y. V stolpcu, ki ustreza neznanki z, nimamo pivota, zato je z prosta neznanka. Z njo lahko iz enačb, ki pripadata prvima dvema vrsticama:

$$\begin{aligned} x - 2z &= 3 \\ y + z &= 1, \end{aligned}$$

izrazimo glavni neznanki x in y:

$$\begin{aligned} x &= 2z + 3 \\ y &= -z + 1. \end{aligned}$$

Dobili smo neskončno rešitev sistema enačb, za vsako realno število z dobimo po eno rešitev.

V primeru 6.2.5 je imel sistem linearnih enačb eno prosto neznanko in zato neskončno rešitev. Če bi imeli še več prostih neznank, bi imeli še več parametrov, s katerimi bi izrazili neskončno rešitev. Sistem enačb $A\vec{x} = \vec{b}$ ima natanko eno rešitev natanko tedaj, ko v sistemu ni prostih neznank. To se zgodi natanko tedaj, ko je $\text{rang}(A)$ enak rangu razširjene matrike, ta pa je enak številu neznank. V nasprotnem primeru, če je $\text{rang}(A)$ enak rangu razširjene matrike, ki pa je strogo manjši od števila neznank n, ima sistem neskončno mnogo rešitev, ki so odvisne od $n - \text{rang}(A)$ parametrov.

Če ima sistem linearnih enačb

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

rešitev, potem ima natanko eno rešitev natanko tedaj, ko je število pivotov enako številu neznank. 64

6.2.3. Homogeni sistemi.

Prav poseben sistem linearnih enačb je tak, ki ima vse desne strani enake 0.

Sistem linearnih enačb je *homogen*, če je desna stran sistema sestavljena iz samih ničel:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n &= 0 \\ \vdots \qquad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

ali na kratko

$$A\vec{x} = \vec{0}.$$

V tem primeru se na desni strani sistema z operacijami (E1)-(E3) ohranjajo ničle, zato namesto razširjene matrike sistema pišemo kar matriko sistema.

Homogen sistem enačb je vedno rešljiv, saj je

$$x_1 = x_2 = \cdots x_n = 0$$

vedno rešitev. Tej rešitvi pravimo *trivialna rešitev*.

Če v pravilu $\boxed{64}$ nadomestimo sistem s homogenim sistemom, dobimo naslednji rezultat.

Homogen sistem ima netrivialne rešitve natanko tedaj, ko je rang matrike sistema strogo manjši od števila neznank sistema. 65

6.3. Determinante

Vsaki matriki lahko priredimo cel kup parametrov. Spoznali smo že rang matrike, ki je enak številu neničelnih vrstic v matriki v vrstično stopničasti obliki, pridobljeni po Gaussovem postopku. V tem razdelku bomo spoznali *determinanto* matrike. Z njeno pomočjo lahko hitro ugotovimo, ali ima dana matrika inverzno matriko ali ne in izračunamo mešani produkt treh vektorjev. Poleg tega nam na primer v geometriji determinanta matrike, ki pripada neki preslikavi, pove, kako se spreminjajo prostornine teles pri tej preslikavi.

Determinanto lahko definiramo le za kvadratne matrike, ne moremo je izračunati za matrike, ki nimajo enakega števila vrstic in stolpcev.

Determinanta kvadratne matrike $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je število

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{19}$$

ki ga rekurzivno izračunamo z naslednjima praviloma:

(1) Determinanta 1×1 matrike $A = [a_{11}] \in \mathbb{R}^{1\times 1}$ je enaka $\det(A) = a_{11}$.
(2) Determinanta $n \times n$ matrike je vsota, sestavljena iz $(n-1) \times (n-1)$ determinant podmatrik matrike A:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a_{1i} \det(\tilde{A}_{1i}), \tag{20}$$

pri čemer dobimo matriko $\tilde{A}_{1i}$ tako, da v matriki A izpustimo prvo vrstico in i-ti stolpec matrike A.

Determinanti $n \times n$ kvadratne matrike rečemo tudi *$n \times n$ determinanta*. Pravilu (20) pa pravimo *razvoj po prvi vrstici* determinante.

PRIMER 6.3.1. *Izračunaj vrednost* 2×2 *determinante*

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

REŠITEV: *Po definiciji determinante* 2×2 *matrike* (20) *je le-ta enaka vsoti* 1×1 *determinant:*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{2} (-1)^{i-1} a_{1i} \det(\tilde{A}_{1i}) = a_{11} \det(\tilde{A}_{11}) - a_{12} \det(\tilde{A}_{12}).$$

V našem primeru je $a_{11} = 1$ *in* $a_{12} = 3$. *Podmatriko* $\tilde{A}_{11}$ *dobimo iz matrike* A *tako, da ji prečrtamo prvo vrstico in prvi stolpec. Zatorej* $\tilde{A}_{11} = [5]$ *in* $\det(\tilde{A}_{11}) = 5$. *Podobno, podmatirko* $\tilde{A}_{12}$ *dobimo iz matrike* A *tako, da ji prečrtamo prvo vrstico in drugi stolpec. Torej je* $\tilde{A}_{12} = [2]$ *in* $\det(\tilde{A}_{12}) = 2$. *Sledi*

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 3 \cdot 2 = -1.$$

Po istem ključu lahko izračunamo splošno 2×2 determinanto:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

66

Izračunajmo sedaj še vrednost splošne 3×3 determinante

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Po enačbi (20) razvijmo determinanto po prvi vrstici. V njeni vsoti tako nastopajo tri 2×2 determinante podmatrik matrike A, ki jih dobimo iz A s črtanjem prve vrstice in ustreznih stolpcev:

$$\begin{bmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \boxed{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Torej je

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}. \end{aligned}$$

Teh šest sumandov si lahko zapomnimo tako, da navidezno prepišemo prva dva stolpca še enkrat na desno stran determinante. Nato zmnožimo elemente, ki se pojavljajo na isti diagonali. Če množimo po vsaki izmed treh zelenih diagonal, na vsaki dobimo produkt treh števil, in te tri produkte seštejemo. Nato množimo elemente na vsaki izmed treh oranžnih diagonal in te tri produkte odštejemo od prejšnje vsote. Torej si lahko formulo za izračun 3×3 determinante ponazorimo tudi kot:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= \left| \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right. = \\ &= \underline{a_1a_{22}a_{33}} + \underline{a_{12}a_{23}a_{31}} + \underline{a_{13}a_{21}a_{32}} \\ &\qquad - \underline{a_{13}a_{22}a_{31}} - \underline{a_{11}a_{23}a_{32}} - \underline{a_{12}a_{21}a_{33}}. \end{aligned} \qquad \boxed{67}$$

PRIMER 6.3.2. *Izračunaj vrednost 3×3 determinante*

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 7 & 1 \\ 0 & 6 & 8 \end{vmatrix}$$

REŠITEV: *Po definiciji lahko izračunamo determinanto kot*

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 7 & 1 \\ 0 & 6 & 8 \end{vmatrix} &= 3 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = \\ &= 3 \cdot (7 \cdot 8 - 1 \cdot 6) - 2 \cdot (5 \cdot 8 - 1 \cdot 0) + 4 \cdot (5 \cdot 6 - 0 \cdot 7) = \\ &= 190 \end{aligned}$$

ali pa s pomočjo formule $\boxed{67}$ *kot*

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 6 & 8 & 0 & 6 \end{array} \right. &= 3 \cdot 7 \cdot 8 + 2 \cdot 1 \cdot 0 + 4 \cdot 5 \cdot 6 - 4 \cdot 7 \cdot 0 - 3 \cdot 1 \cdot 6 - 2 \cdot 5 \cdot 8 = \\ &= 190. \end{aligned}$$

Nikakor pa nas ne sme zamikati, da bi formuli $\boxed{66}$ in $\boxed{67}$ posploševali na determinante velikosti 4×4 ali več, saj podobno enostavne formule tam ne veljajo. Zato si oglejmo algoritem, kako najlažje izračunamo determinante večjih matrik. Pri tem večine dejstev ne bomo dokazovali.

Kot prvo omenimo, da se vrednost determinante ne spremeni, če zamenjamo vlogi vrstic in stolpcev. Zatorej velja

$$\boxed{\det(A^{\mathsf{T}}) = \det(A).} \qquad \boxed{68}$$

Torej po definiciji (20) in lastnosti $\boxed{68}$ lahko razvijamo determinanto matrike (19) tudi po prvem stolpcu matrike

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a_{i1} \det(\tilde{A}_{i1}), \tag{21}$$

pri čemer dobimo matriko $\tilde{A}_{i1}$ tako, da v matriki A izpustimo i-to vrstico in prvi stolpec matrike A.

PRIMER 6.3.3. *Izračunaj determinanto*

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

REŠITEV: *Opazimo, da ima dana determinanta v prvem stolpcu vse elemente razen enega enake 0, zato so pri razvoju* (21) *determinante po prvem stolpcu kar trije sumandi enaki 0:*

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 0 & 7 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

Za izračun tako dobljene 3×3 *determinante lahko uporabimo formulo* $\boxed{67}$, *a ker sta kar dva od treh elementov v prvem stolpcu enaka 0, raje razvijmo determinanto po prvem stolpcu.*

$$3 \begin{vmatrix} 0 & 7 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-4) \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -12(7 \cdot 3 - 4 \cdot 5) = -12.$$

Kvadratno matriko, ki ima vse elemente pod glavno diagonalo enake 0, imenujemo *zgornje trikotna matrika*, če pa ima vse elemente nad glavno diagonalo enake 0, pa *spodnje trikotna matrika*. S pomočjo (21) in z indukcijo pokažimo naslednjo trditev:

Če so vsi elementi na eni strani glavne diagonale matrike A enaki 0, potem je vrednost determinante $\det(A)$ enaka produktu diagonalnih elementov:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

69

in

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \dots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

Za matriko $A_1 = [a_{11}]$ je njena determinanta enaka $\det(A_{11}) = a_{11}$, zato velja trditev 69 za matriko velikosti 1×1. Predpostavimo sedaj, da trditev 69 velja za vse matrike velikosti $(n-1) \times (n-1)$ in izberimo poljubno zgornje trikotno $n \times n$ matriko

$$A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Njeno determinanto razvijmo po prvem stolpcu, kot je to definirano v (21):

$$\begin{aligned} \det(A_n) &= a_{11}\det(\tilde{A}_{11}) + \sum_{i=2}^{n}(-1)^{i-1}\cdot 0 \cdot \det(\tilde{A}_{i1}) = \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn}, \end{aligned}$$

kjer smo v zadnjem koraku uporabili indukcijsko predpostavko, da je determinanta $(n-1) \times (n-1)$ matrike $\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$ enaka produktu diagonalnih elementov $a_{22}a_{33}\dots a_{nn}$.
S tem smo pokazali trditev 69.

Zgornje trikotna matrika je matrika v vrstično stopničasti obliki in znamo izračunati njeno determinanto. Izkaže se, da lahko determinanto poljubne matrike z zaporedjem dovoljenih operacij prevedemo na determinanto zgornje trikotne matrike. Zato navedimo, kako se spremeni determinanta matrike, če matriko nekoliko spremenimo.

Za determinanto matrike velja naslednje:

(D1) Če zamenjamo dve vrstici, se spremeni predznak determinante.

(D2) Vrednost determinante se ne spremeni, če neki vrstici prištejemo poljuben večkratnik katerekoli druge vrstice.

(D3) Če vse elemente neke vrstice pomnožimo z istim številom α, se vrednost determinante pomnoži z α.

Pri Gaussovem eliminacijskem postopku smo želeli z operacijami (E1)-(E3) preoblikovati matriko v vrstično stopničasti obliko, saj smo lahko iz nje preprosteje razbrali rešitve. Tudi pri determinantah je cilj isti: z operacijami (D1)-(D3) želimo preoblikovati matriko v vrstično stopničasto obliko, torej zgornje trikotno matriko. Te operacije so na prvi pogled zelo podobne operacijam (E1)-(E3) postopka Gaussove eliminacije, pa vendar sta le (D2) in (E2) enaki.

Sedaj je naš cilj jasen. Determinanto poljubne kvadratne matrike izračunamo tako, da s pomočjo operacij (D1)-(D3) preoblikujemo matriko v zgornje ali spodnje trikotno matriko, katere determinanto znamo izračunati po 69. Ker velja 68, lahko vse operacije (D1)-(D3), ki smo jih navedli za vrstice, izvajamo tudi na stolpcih.

PRIMER 6.3.4. *Izračunaj determinanto*

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

REŠITEV: *Postopajmo tako kot pri Gaussovi eliminaciji, od leve proti desni in od zgoraj navzdol.*

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} v_2 &\rightsquigarrow v_2 - 3v_1 \\ v_3 &\rightsquigarrow v_3 - v_1 \\ v_5 &\rightsquigarrow v_5 + 2v_1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} v_2 &\rightsquigarrow v_3 \\ v_3 &\rightsquigarrow v_2 \end{aligned} \qquad v_4 \rightsquigarrow v_4 - v_2$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} v_4 &\rightsquigarrow v_4 - v_3 \\ v_5 &\rightsquigarrow v_5 + 2v_3 \end{aligned} \qquad v_5 \rightsquigarrow v_5 - 2v_4$$

$$= \quad - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad = \quad -1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot (-1) = 3.$$

Kakšna je determinanta matrike, ki ima kakšno vrstico ničelno? Ker so vsi elementi v tej vrstici večkratniki števila 0, je po pravilu (D3) vrednost determinante enaka 0.

Prav tako je vsaka determinanta matrike, kjer je neka vrstica večkratnik druge, enaka 0. Namreč, s pomočjo (D2) lahko omenjeni vrstici prištejemo primeren večkratnik druge, s čimer postane celotna vrstica enaka 0.

Oglejmo si še dva zgleda znanih formul, ki si ju je lažje zapomniti v jeziku determinant.

Spomnimo se formule za vektorski produkt vektorjev $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ in $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$, ki smo ga definirali kot

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix}.$$

V vsaki od komponent prepoznamo 2×2 determinanto, kar lahko zapišemo tudi kot

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_2b_3 - a_3b_2)\,\vec{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\,\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\,\vec{k} = \\ &= \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}. \end{aligned}$$

Mešani produkt vektorjev $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ in $\vec{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$ tako postane

$$\begin{aligned} (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) &= \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \\ &= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) = \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Torej smo na kratko zapisali mešani produkt treh vektorjev v $\mathbb{R}^3$ kot vrednost 3×3 determinante:

$$\boxed{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.}$$

Oglejmo si homogeni sistem linearnih enačb

$$A\vec{x} = 0,$$

kjer je $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ kvadratna matrika. Matriko A s pomočjo Gaussove eliminacije preoblikujemo v vrstično stopničasto obliko in tako dobljeno matriko imenujemo B. Z Gaussovo eliminacijo smo operacijami (D1)-(D3) determinanto bodisi ohranili, bodisi pomnožili z neničelnim številom. Zato je determinanta matrike B neničelna natanko tedaj, ko je neničelna determinanta matrike A. Zatorej velja naslednje: če je rang $n \times n$ matrike A enak n, ima matrika A po koncu Gaussove eliminacije n pivotov in zato neničelno determinanto. Obratno, če je rang $n \times n$ matrike A strogo manjši kot n, pomeni, da ima matrika A po koncu Gaussove eliminacije kvečjemu $n-1$ pivotov in zato ničelno determinanto.

Homogen sistem enačb n enačb z n neznankami ima netrivialne rešitve natanko tedaj, ko je determinanta matrike sistema enaka 0. 70

Podobno ugotovimo tudi naslednje:

Rang matrike je enak velikosti največje podmatrike, ki ima neničelno determinanto.

6.4. Inverzi matrik in matrične enačbe

6.4.1. Definicija. Vemo, da je vsako neničelno realno število obrnljivo. To pomeni, da ima vsako tako število $a \in \mathbb{R}$ svoj inverz za množenje, torej obstaja tak $a^{-1} = \frac{1}{a}$, da velja

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1.$$

Analogno s tem definiramo inverz kvadratne matrike, ki pa za razliko od realnih števil ne obstaja vedno.

Kvadratna matrika A je *obrnljiva*, če obstaja takšna matrika A^{-1}, za katero velja

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

Matriki A^{-1} pravimo *inverz* matrike A. Kvadratna matrika, ki ni obrnljiva, je *singularna* ali tudi *neobrnljiva*.

PRIMER 6.4.1. *Ali je matrika* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ *obrnljiva?*

REŠITEV: *Na primer, da obstaja takšna* 2×2 *matrika* $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, *da velja*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Če zmnožimo matriki na levi strani in dobljeni produkt po komponentah enačimo z matriko na desni strani, dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} a+c &= 1 \\ 2a+c &= 0 \\ b+d &= 0 \\ 2b+d &= 1. \end{aligned}$$

Ker nastopata spremenljivki a in c le v prvih dveh enačbah, hitro izračunamo, da je $a=-1$, $c=2$. *Podobno iz zadnjih dveh enačb dobimo* $b=1$ *in* $d=-1$. *Hitro preverimo, da za tako dobljeno matriko* $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ *velja tudi*

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Torej je matrika A obrnljiva in velja

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Naj bo determinanta matrike $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ različna od 0. Če zmnožimo matriko $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ z matriko $\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$, velja

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix} = I$$

in

$$\frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix} = I.$$

Ker je njun produkt v obeh vrstnih redih identična matrika, je $\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ inverz matrike $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Če je determinanta matrike $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ enaka 0, se izkaže da matrika ni obrnljiva. Tako velja naslednje.

> Determinanta $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$ je različna od 0 natanko tedaj, ko je matrika $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ obrnljiva. V tem primeru velja
>
> $$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

71

Na primer, da za matriki $B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ velja $AB = BA = I$ in $AC = CA = I$. Potem je

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C.$$

Torej je $B = C$ in zato velja:

Inverz obrnljive matrike je en sam.

S pravilom $\boxed{71}$ bi v primeru 6.4.1 lahko izračunali inverz matrike A kot

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Obenem se lahko hitro prepričamo, da na primer matrika $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ni obrnljiva, hkrati pa je njena determinanta enaka 0.

6.4.2. Algoritem za računanje inverza matrike. Oglejmo si sedaj učinkovit algoritem, kako izračunati inverz obrnljive matrike. Velja namreč sledeče.

Če zaporedje operacij (D1)-(D3) prevede kvadratno matriko A v identično matriko I, potem isto zaporedje operacij prevede matriko I v matriko A^{-1}. $\boxed{72}$

Kar pomeni, da lahko zložimo matriki A in I eno poleg druge

$$\left[\begin{array}{c|c} A & I \end{array}\right]$$

v matriko z n vrsticami in $2n$ stolpci ter hkrati na njunih vrsticah izvajamo Gauss-Jordanov eliminacijski postopek, dokler ne prevedemo matrike A v identično matriko. V tistem trenutku po $\boxed{72}$ na mestu, kjer je na začetku stala identična matrika, zagledamo inverzno matriko A^{-1}.

PRIMER 6.4.2. *Poišči inverz matrike* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$*, če obstaja.*

REŠITEV: *Po zgornjem algoritmu poiščimo inverz s pomočjo Gauss-Jordanovega postopka na vrsticah matrike*

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

To lahko naredimo na primer z naslednjim zaporedjem operacij:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{lcl} v_2 & \rightsquigarrow & v_2 - v_1 \\ v_3 & \rightsquigarrow & v_3 + v_1 \end{array} \qquad v_3 \rightsquigarrow v_3 + 2v_2 \qquad \begin{array}{lcl} v_2 & \rightsquigarrow & -v_2 \\ v_3 & \rightsquigarrow & -v_3 \end{array}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

$$v_2 \rightsquigarrow v_2 - v_3 \qquad v_1 \rightsquigarrow v_1 - 2v_2$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right],$$

iz česar razberemo, da je

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Če je rang matrike A pri tem strogo manjši od n, po Gauss-Jordanovem postopku iz matrike A ne moremo pridobiti identične matrike, saj ima le-ta rang enak n. Zato lahko po 72 ugotovimo, da v kolikor z zaporedjem operacij (D1)-(D3) matrike A ni mogoče prevesti v identično matriko I, potem matrika A ni obrnljiva.

PRIMER 6.4.3. *Ugotovi, ali je matrika* $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *obrnljiva in poišči njen inverz, če obstaja.*

REŠITEV: *Reševanja se lotimo tako, da poskusimo izračunati inverz s pomočjo Gauss-Jordanovega postopka na vrsticah matrike*

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

To lahko naredimo na primer z naslednjim zaporedjem operacij:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$v_3 \rightsquigarrow v_3 + v_1 \qquad v_3 \rightsquigarrow v_3 - v_2$$

Ker ima matrika na levi rang enak 2, tam ne moremo pridobiti identične matrike. Zato matrika B ni obrnljiva.

Povzemimo naše ugotovitve o obrnljivosti matrik. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ obrnljiva matrika. Po 72 obstaja zaporedje operacij (D1)-(D3), ki matriko A prevede v identično matriko. Zatorej ima tako spremenjena matrika n pivotov in je njen rang enak n, njena determinanta pa je neničelna. Posledično ima homogeni sistem $A\vec{x} = \vec{0}$ samo eno rešitev $\vec{x} = \vec{0}$, kar smo ugotovili v 70. Vsak sistem $A\vec{x} = \vec{b}$ pa lahko rešimo tako, da z leve strani enakost množimo z matriko A^{-1} in dobimo enolično rešitev sistema $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$.

S podobnim razmislekom se prepričamo, da so vse zgornje ugotovitve med seboj ekvivalentne. Kar pomeni, da lahko obrnljivost kvadratne matrike A ekvivalentno predstavimo na enega izmed naslednjih načinov.

Naj bo A matrika velikosti $n \times n$. Naslednje trditve so ekvivalentne:

(1) Matrika A je obrnljiva.
(2) $\operatorname{rang} A = n$
(3) $\det A \neq 0$
(4) Homogeni sistem $A\vec{x} = \vec{0}$ ima samo trivialno rešitev.
(5) Sistem enačb $A\vec{x} = \vec{b}$ ima natanko eno rešitev pri poljubnem $\vec{b}$.

6.4.3. Matrične enačbe. V realnih številih je deljenje števil $\frac{a}{b} = ab^{-1}$ enako množenju števila a z inverzom b^{-1} števila $b \neq 0$. Prav tako lahko deljenje matrik predstavimo kot množenje z inverzno matriko, če le-ta obstaja. Pri tem pa moramo paziti na to, da matricno mnozenje ni komutativno. Tako je mogoče z obrnljivimi matrikami lažje računati in manipulirati z matričnimi enakostmi. Poglejmo si to na naslednjem zgledu.

PRIMER 6.4.4. *Kako (in pri kakšnih pogojih) lahko iz matrične enakosti*

$$AXB = C$$

izrazimo matriko X?

REŠITEV: *Če bi bila $axb = c$ številska enakost in a ter b neničelni števili, bi enakost preprosto na obeh straneh delili z ab in iz nje izrazili $x = a^{-1}b^{-1}c$. Pri matrični enakosti pa moramo biti pri tem bolj previdni.*

Če je matrika A obrnljiva, lahko enakost $AXB = C$ pomnožimo z njenim inverzom A^{-1}. Ker moramo pri množenju dveh matrik paziti na njun vrstni red, moramo enakost $AXB = C$ z leve množiti z A^{-1}. To zapišemo kot:

$$\begin{aligned} A^{-1}\cdot\ \backslash\quad AXB &= C \\ A^{-1}AXB &= A^{-1}C \\ IXB &= A^{-1}C \\ XB &= A^{-1}C. \end{aligned}$$

S tem smo se na levi strani matrike X znebili matrike A. Če je obrnljiva tudi matrika B, lahko enakost množimo tudi z B^{-1}, tokrat z desne strani. Dobimo:

$$\begin{aligned} XB &= A^{-1}C \quad / \cdot B^{-1} \\ XBB^{-1} &= A^{-1}CB^{-1} \\ XI &= A^{-1}CB^{-1} \\ X &= A^{-1}CB^{-1} \end{aligned}$$

Torej, če sta A in B obrnljivi matriki, lahko iz enakosti $AXB = C$ izrazimo matriko X kot $X = A^{-1}CB^{-1}$.

PRIMER 6.4.5. *Za matriki*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \ \textit{in} \ B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

poišči vse matrike X, ki rešijo enačbo

$$AXA = B.$$

REŠITEV: *Ker je $\det(A) = -1$, je matrika A obrnljiva in po formuli 71 je njen inverz enak $A^{-1} = -\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Če matrično enačbo $AXA = B$ z leve in desne množimo z inverzom matrike A, dobimo*

$$\begin{aligned} A^{-1}\cdot\backslash \qquad AXA &= B \qquad / \cdot A^{-1} \\ A^{-1}AXAA^{-1} &= A^{-1}BA^{-1} \\ IXI &= A^{-1}BA^{-1} \\ X &= A^{-1}BA^{-1} \end{aligned}$$

in zato je

$$\begin{aligned} X = A^{-1}BA^{-1} &= \left(-\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\left(-\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

PRIMER 6.4.6. *Za matriki*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \ \textit{in} \ B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

poišči vse matrike X, ki rešijo enačbo

$$AXA = B.$$

REŠITEV: *Matrika A ima determinanto enako 0, zato ni obrnljiva in iz enakosti $AXA = B$ ne moremo izraziti matrike X. Zato označimo matriko $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ in zapišimo enakost $AXA = B$ kot*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Če zmnožimo matrike na levi strani in zapišemo matrično enačbo po komponentah, dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} a+b+c+d &= 0 \\ a+b+c+d &= 1 \\ a+b+c+d &= -2 \\ a+b+c+d &= 0, \end{aligned}$$

kar je očitno protisloven sistem enačb. Zato takšna matrika X, da bi veljala enakost $AXA = B$, ne obstaja.

PRIMER 6.4.7. *Za matriki*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ in } B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

poišči vse matrike X, ki rešijo enačbo

$$AXA = B.$$

REŠITEV: *Kot v prejšnjem primeru matrika A ni obrnljiva, zato označimo matriko $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ in tako v vsaki komponenti matrične enačbe $AXA = B$ dobimo enakost*

$$a + b + c + d = 2.$$

To nam da zvezo $d = 2 - a - b - c$ in zato ima enačba $AXA = B$ neskončno rešitev

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 2 - a - b - c \end{bmatrix},$$

kjer so a, b, c poljubna realna števila.

Če je matrika $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ obrnljiva, potem lahko zanjo poleg potenc A^2, A^3,... definiramo tudi negativne potence.

Za obrnljivo kvadratno matriko $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ lahko definiramo njene potence kot

$$\begin{aligned} A^0 &= I \\ A^n &= AA^{n-1} \\ A^{-n} &= (A^{-1})^n \end{aligned}$$

za vsa naravna števila n.

6.5. Matrike kot preslikave

V zadnjem razdelku bomo na matrike pogledali kot na preslikave. Če namreč matriko A množimo z vektorjem, kot produkt dobimo nov vektor. Z drugimi besedami, matrika A je preslikava prostora vektorjev v prostor vektorjev. Takšnim preslikavam v linearni algebri pravimo *linearne preslikave*.

Pri tem je determinanta matrike A enaka faktorju spremembe prostornine preko preslikave A. Poleg tega, če je determinanta pozitivna, pomeni, da se pri preslikavi ohranja smer orientacije likov, medtem ko negativna determinanta pomeni obračanje orientacije likov (kot na primer pri zrcaljenju).

Ogledali si bomo nekaj posebnih matrik velikosti 2×2, ki ustrezajo linearnim preslikavam ravnine $\mathbb{R}^2$ vase.

PRIMER 6.5.1. *Ničelna matrika je edina matrika, da z množenjem s poljubnim vektorjem vedno dobimo ničelni vektor:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Torej nam ničelna matrika predstavlja ničelno preslikavo.

Ker se vsak lik z ničelno preslikavo izrodi v eno samo točko, je njegova nova ploščina 0-kratnik prvotnega. To se ujema z determinanto ničelne matrike, ki je enaka 0.

PRIMER 6.5.2. *Množenje z identično matriko*

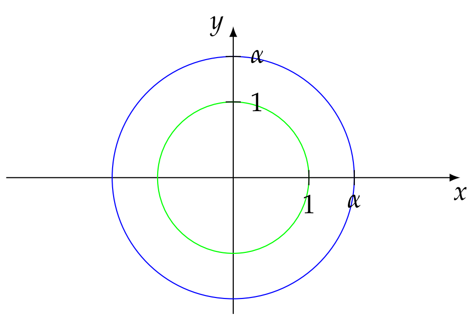
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

ne spremeni vektorja, s katerim množimo, zatorej identična matrika predstavlja identično preslikavo.

PRIMER 6.5.3. *Bolj splošno, množenje z diagonalno matriko αI, ki ima na diagonali enake vrednosti α, da za rezultat večkratnik originalnega vektorja:*

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Ta preslikava αI predstavlja razteg za faktor α. Na sliki je prikazano, kako se s preslikavo αI preslika krožnica s polmerom 1 v krožnico s polmerom α.

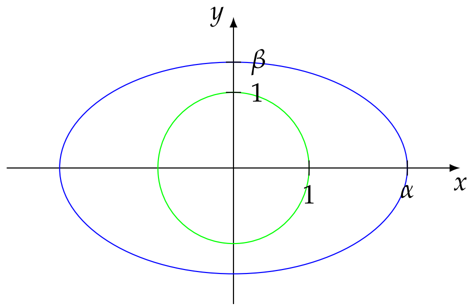


Pri tem je determinanta matrike αI enaka α^2, kar pomeni, da se s preslikavo αI lik s ploščino P preslika v lik s ploščino $\alpha^2 P$. V primeru narisanega raztega vidimo, da je ploščina prvotnega kroga, obrobljenega z zeleno, enaka π, ploščina novega kroga, obrobljenega z modro, pa $\alpha^2\pi$.

PRIMER 6.5.4. *Kaj pa, če bi množili s poljubno diagonalno matriko D? Potem bi se vektor $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ preslikal v*

$$D \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x \\ \beta y \end{bmatrix}.$$

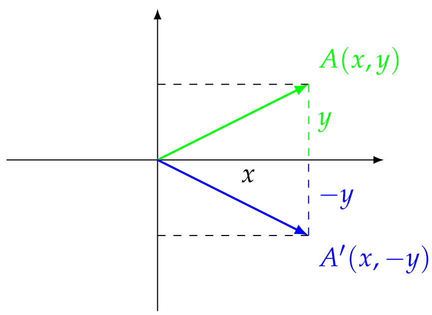
Kar pomeni, da bi preslikava v smeri x naredila razteg za faktor α, v smeri y pa naredila razteg za faktor β.



Krožnica s središčem v koordinatnem izhodišču in s polmerom 1 *se z raztegom preslika v elipso z istim središčem in polosema α in β.*

Matrika D predstavlja razteg, v eni smeri za faktor α, v drugi za faktor β in pri tem se lik s ploščino P preslika v lik s ploščino $\alpha\beta P$. To se ujema z opisom geometrijskega pomena determinante, ki je v tem primeru enaka $\det D = \alpha\beta$.

PRIMER 6.5.5. *Kako bi izgledala matrika preslikave, ki zrcali dani vektor preko osi x?*



Takšno zrcaljenje slika točko $A(x, y)$ v točko $A'(x, -y)$. Oziroma, povedano s krajevnimi vektorji, krajevni vektor $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ točke A preslika v krajevni vektor $\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$ točke A'. Zatorej je matrika, ki pripada zrcaljenju preko x osi, enaka $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ in velja

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}.$$

V splošnem je matrika, ki pripada zrcaljenju čez premico $y = kx$, kjer je $k = \tan \frac{\varphi}{2}$, enaka

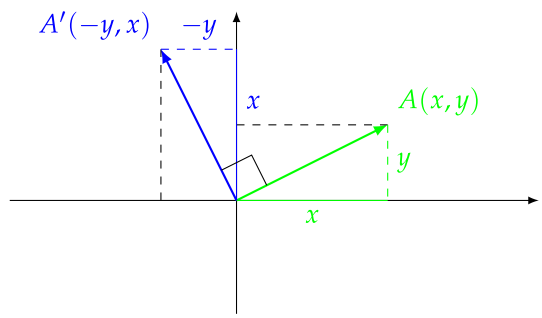
$$Z = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{bmatrix}.$$

Determinanta matrike Z je enaka

$$\det Z = -\cos^2\varphi - \sin^2\varphi = -1,$$

kar se sklada s tem, da se ploščine likov pri zrcaljenju ohranijo, hkrati pa se spremeni orientacija likov.

PRIMER 6.5.6. *Oglejmo si matriko, ki zavrti dani vektor okoli koordinatnega izhodišča za kot $\frac{\pi}{2}$.*



Predstavljajmo si, da celotni pravokotnik s stranicama x in y, ki ga z diagonalo določa krajevni vektor $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ *točke A, prekucnemo za kot $\frac{\pi}{2}$ v pozitivno smer. To pomeni, da ima slika A' po vrtenju krajevni vektor* $\begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$. *Ker je*

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix},$$

je matrika vrtenja za kot $\frac{\pi}{2}$ v pozitivni smeri enaka

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

V splošnem je matrika, ki pripada vrtenju okoli koordinatnega izhodišča v pozitivni smeri za kot φ, enaka

$$R = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

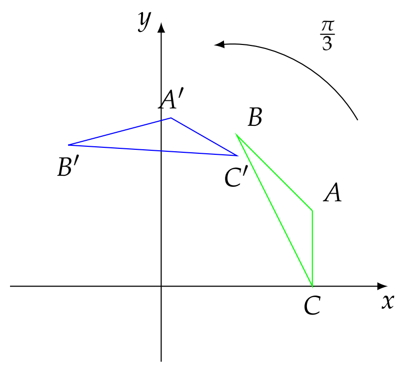
Njena determinanta je enaka $\det R = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$. *Liki po vrtenju ostanejo enaki, le nahajajo se drugje v koordinatnem sistemu.*

PRIMER 6.5.7. *Zavrti trikotnik z oglišči $A(2,1)$, $B(1,2)$, $C(2,0)$ za kot $\frac{\pi}{3}$ okoli koordinatnega izhodišča.*

REŠITEV: *Matrika vrtenja okoli koordinatnega izhodišča za kot $\frac{\pi}{3}$ je enaka*

$$R_{\frac{\pi}{3}} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Označimo z A', B' in C' slike točk A, B in C po vrtenju.



Torej se krajevni vektorji točk A, B in C zaporedoma preslikajo v krajevne vektorje

$$\vec{r}_{A'} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(2-\sqrt{3}) \\ \frac{1}{2}(1+2\sqrt{3}) \end{bmatrix} \doteq \begin{bmatrix} 0,13 \\ 2,23 \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}_{B'} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-2\sqrt{3}) \\ \frac{1}{2}(2+\sqrt{3}) \end{bmatrix} \doteq \begin{bmatrix} -1,23 \\ 1,87 \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}_{C'} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} \doteq \begin{bmatrix} 1 \\ 1,73 \end{bmatrix}.$$

Če želimo komponirati preslikave, ki so podane z matrikami, je njihov kompozitum kar produkt matrik. Hkrati za produkte matrik velja presenetljiv rezultat.

Determinanta produkta dveh kvadratnih matrik je enaka produktu determinant:

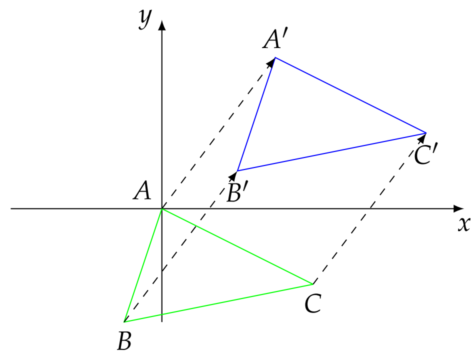
$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Niso pa vse preslikave ravnine takšne, da bi jih lahko podali kot množenje matrike z vektorjem.

PRIMER 6.5.8. *Preslikava $\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ki je podana s predpisom*

$$\tau\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

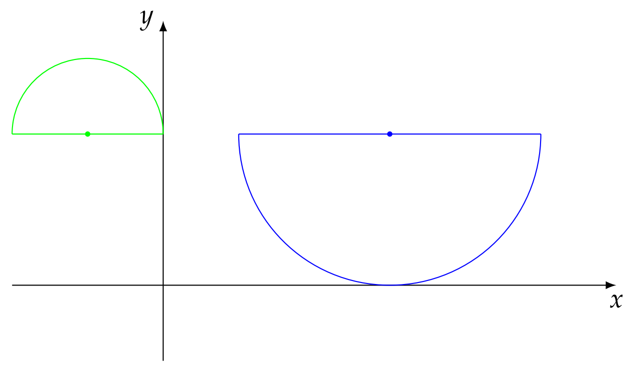
vsakemu vektorju v ravnini priredi novi vektor, ki je vsota originalnega z vektorjem $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. To pomeni, da vsako točko premakne v smeri vektorja $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ in zato je preslikava τ premik (ali translacija) ravnine $\mathbb{R}^2$ za vektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.



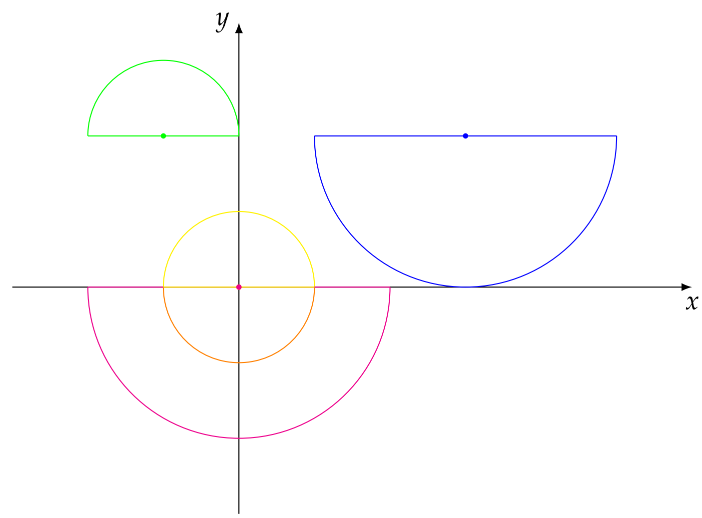
Predpisa za premik pa ne moremo podati kot množenje 2×2 matrike z vektorjem v $\mathbb{R}^2$. Vendar tudi za to obstaja rešitev. Če vektorje v ravnini predstavimo v homogenih koordinatah, ki so vektorji s tremi komponentami, lahko vse naštete geometrijske transformacije predstavimo kot množenje 3×3 matrike z vektorjem v $\mathbb{R}^3$. Homogene koordinate se uporabljajo v računalniški grafiki.

Zaključimo s slikovitim primerom, kako iz geometrijskega problema zapišemo preslikavo s pomočjo matrik in vektorjev.

PRIMER 6.5.9. *Določi preslikavo, ki preslika polkrog s središčem v točki* $(-1, 2)$ *in polmerom 1 v prekucnjen polkrog s središčem v točki* $(3, 2)$ *in polmerom 2, kot je prikazano na sliki.*



REŠITEV: *Zapišimo preslikavo A, ki slika zeleni polkrog v modrega, kot kompozitum preslikav, ki jih že poznamo.*



(1) *Najprej premaknimo zeleni polkrog v koordinatno izhodišce v rumeni polkrog. To naredimo tako, da poljubnemu vektorju* $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ *prištejemo nasprotni vektor vektorja* $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$. *Velja*

$$T_1\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \left(-\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}\right).$$

(2) *Nato rumeni polkrog prezrcalimo čez premico* $y = 0$ *v oranžni polkrog. Zrcaljenju ustreza množenje z matriko*

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(3) *Zatem oranžni polkrog raztegnimo za faktor 2 v roza polkrog, čemur ustreza množenje z matriko*

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(4) *Nazadnje premaknimo še roza polkrog v modrega. To naredimo tako, da poljubnemu vektorju prištejemo krajevni vektor* $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$*:*

$$T_2\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ker kompozitumu preslikav ustreza produkt matrik, je preslikava A, ki slika zeleni polkrog v modrega, enaka

$$\begin{aligned}
A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= T_2\left(D\left(Z\left(T_1\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)\right)\right)\right) = \\
&= T_2\left((DZ)\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)\right) = \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 2x+5 \\ -2y+6 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

DODATEK A

Realna in kompleksna števila

A.1. Realna števila

V življenju se najprej srečamo z *naravnimi števili*. To so števila, s katerimi štejemo. Stvar dogovora je, ali je 0 naravno število ali ne. Tu se domenimo, da bo 0 naravno število, saj nam v računalništvo tako bolj ustreza. Torej so naravna števila števila

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, \ldots$$

Za naravna števila velja, da ima vsako število n svojega naslednika $n+1$. Pri tem imata različni naravni števili različna naslednika. Ti aksiomi nam omogočajo, da lastnosti števil, ki veljajo za vsa naravna števila, dokazujemo s popolno indukcijo. Množico naravnih števil bomo označili z $\mathbb{N}_0$.

Naravna števila lahko seštevamo in množimo. Če jih želimo tudi odštevati, moramo množico naravnih števil razširiti do množice *celih števil*, ki jo bomo označili z $\mathbb{Z}$. V množici celih števil so tudi vse možne razlike $n-m$, kjer sta n in m naravni števili. Natančneje, množica celih števil

$$\ldots, -4, -3, -2, -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots$$

je sestavljena iz pozitivnih celih števil $(1, 2, 3, \ldots)$, množice negativnih celih števil $-1, -2, -3, \ldots$ in števila 0. V množici celih števil lahko seštevamo, odštevamo in množimo.

Da bi lahko cela števila tudi delili, moramo množici celih števil dodati tudi kvociente

$$\frac{n}{m},$$

kjer sta n in m celi števili in pri tem m ni enak 0. Takšna števila imenujemo *racionalna števila* in jih označimo z simbolom $\mathbb{Q}$. Vsako racionalno število lahko predstavimo v obliki okrajšanega ulomka

$$\frac{n'}{m'},$$

kjer je števec n' celo število, imenovalec m' pa neničelno naravno število, pri čemer n' in m' nimata skupnih deliteljev. Drugi možni način je predstavitev z decimalnim zapisom, ki je bodisi končen bodisi ima neskončen periodičen zapis decimalnih mest. Tako so racionalna števila na primer

$$0, \quad 1,\ -3, \quad \frac{2}{5} = 0.4, \quad \frac{-4}{3} = -1.33333333\ldots, \quad -\frac{1}{7} = -0.142857142857142857\ldots$$

Racionalna števila lahko seštevamo, odštevamo, množimo in delimo (z vsemi realnimi števili, razen števila 0).

Množica *realnih števil* $\mathbb{R}$ poleg racionalnih števil vsebuje še *iracionalna števila*. To so števila, ki jih ne moremo zapisati v obliki ulomka, kot na primer

$$\sqrt{2}, \quad -\sqrt[4]{333}, \quad \pi, \quad e, \ldots$$

Lahko pa jih zapišemo kot neskončna decimalna števila v obliki

$$x = \pm\, n.d_1 d_2 d_3 d_4 \ldots,$$

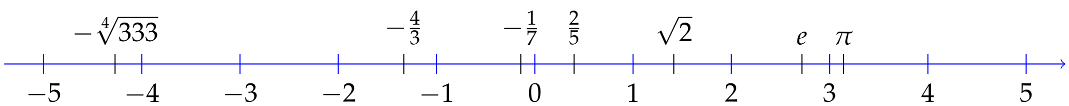
kjer so $d_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ decimalke, n pa naravno število. Pri tem moramo biti pazljivi, saj ta zapis ni enoličen. Tako je na primer $1.00000\ldots = 0.99999\ldots$ Za računske potrebe lahko zapišemo število

$$\sqrt{2} = 1.414213562373095\ldots$$

tudi v obliki končnega decimalnega zapisa, ki pa je le približen zapis vrednosti števila $\sqrt{2}$, kot na primer

$$\sqrt{2} \doteq 1.41421356.$$

Realna števila lahko prikažemo tudi na premici, ki jo imenujemo *realna premica*. To je premica, na kateri si za izhodišče določimo točko 0 in izberemo, kje se nahaja število 1, Vsako pozitivno realno število x narišemo kot točko, ki je za x oddaljena od 0 v desno, vsako negativno število y pa kot točko, ki je za $|y|$ oddaljena od izhodišča v levo.



Interval je podmnožica realnih števil, ki ustreza daljici na realni premici. Poznamo različne intervale. Takšne, ki vsebujejo svoja krajišča, imenujemo *zaprti intervali*. Intervale, ki ne vsebujejo svojih krajišč, pa *odprti intervali*. Uporabljamo naslednje oznake:

$$\begin{aligned}
(a,b) &= \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\} \ldots \text{ odprt interval},\\
[a,b] &= \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\} \ldots \text{ zaprt interval},\\
(a,b] &= \{x \in \mathbb{R};\ a < x \leq b\},\\
[a,b) &= \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x < b\}.
\end{aligned}$$

Pri tem so lahko intervali tudi neomejeni:

$$\begin{aligned}
(a,\infty) &= \{x \in \mathbb{R};\ a < x\},\\
(-\infty,b) &= \{x \in \mathbb{R};\ x < b\}.\\
[a,\infty) &= \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x\},\\
(-\infty,b] &= \{x \in \mathbb{R};\ x \leq b\}.
\end{aligned}$$

A.2. Kompleksna števila

V množici realnih števil nekatere enačbe nimajo rešitev. Na primer, ne obstaja realno število x, za katerega bi veljalo

$$x^2 = -1.$$

Zato se zdi smiselno realna števila razširiti s takšnimi števili, da bodo imeli vsi polinomi z realnimi koeficienti rešitve. Takšno število x, za katerega velja $x^2 = -1$, bomo označili s simbolom *i* in ga imenovali *imaginarna enota*. Število i seveda ni realno število, kajti kvadrat nobenega realnega števila ni enak -1.

Kompleksna števila so števila oblike

$$z = x + iy,$$

kjer je

$$i^2 = -1,$$

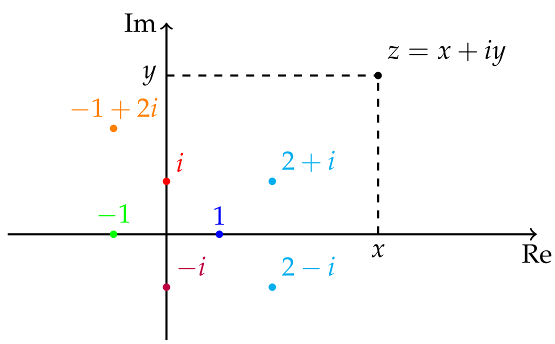
števili x in y pa sta realni števili. Število x imenujemo *realni del* števila z, število y pa *imaginarni del* števila z. Označimo $x = \mathrm{Re}(z)$ ter $y = \mathrm{Im}(z)$.

Dve kompleksni števili sta enaki natanko takrat, kadar imata enaka tako realna dela kot imaginarna dela. Množico vseh kompleksnih števil označimo s simbolom $\mathbb{C}$. Na primer, števila oblike

$$3 + 5i, \quad 2i, \quad -\sqrt{2} + i, \quad 6, \quad \pi + 2i$$

so kompleksna števila. Pri tem je $\mathrm{Re}(3 + 5\mathrm{i}) = 3$ in $\mathrm{Im}(3 + 5\mathrm{i}) = 5$. Še enkrat poudarimo, da sta tako realni kot imaginarni del kompleksnega števila realni števili.

Vemo, da lahko realna števila ponazorimo kot točke na premici, ki jo imenujemo realna premica ali realna os. Kompleksno število $x + iy$ pa lahko ponazorimo kot točko (x, y) v ravnini. Tako vsako kompleksno število ustreza natanko eni točki v *kompleksni ravnini*.



Premico, na kateri ležijo realna števila, imenujemo *realna os*. Vsako realno število x lahko zapišemo kot kompleksno število $x = x + 0 \cdot i$ z imaginarnim delom 0. Kompleksna števila $iy = 0 + iy$ z realnim delom 0 imenujemo tudi čista imaginarna števila. Premico, na kateri ležijo čista imaginarna števila, imenujemo *imaginarna os*.

Absolutna vrednost $|z|$ kompleksnega števila $z = x + iy$ je razdalja točke z do koordinatnega izhodišča v kompleksni ravnini:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

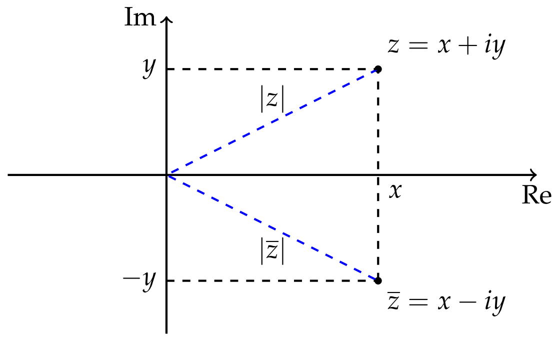
Na primer, $|3 - 4i| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$. Pri tem se za realna števila njihova absolutna vrednost v kompleksnem ujema z znano definicijo absolutne vrednosti realnega števila, $|-3| = |-3 + 0 \cdot i| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = 3$ in $|3| = \sqrt{3^2 + 0^2} = 3$.

Konjugirana vrednost kompleksnega števila $z = x + iy$ je kompleksno število

$$\overline{z} = x - iy.$$

Konjugirano število torej dobimo tako, da obratno predznačimo njegov imaginarni del. Na primer, $\overline{3-4i} = 3+4i$ in $\overline{-3} = \overline{-3+0\cdot i} = -3-0\cdot i = -3$. Oziroma povedano geometrijsko, prezrcalimo število z v kompleksni ravnini preko realne osi. Zato imata števili z in $\overline{z}$ enaki absolutni vrednosti:

$$|\overline{z}| = |z|.$$



Če je x realno število, je $\overline{x} = x$, saj je njegov imaginarni del enak 0.

Če kompleksno število $x+iy$ dvakrat konjugiramo, dobimo $\overline{\overline{x+iy}} = \overline{x-iy} = x+iy$, torej velja

$$\overline{\overline{z}} = z.$$

A.2.1. Računanje s kompleksnimi števili. Seštevanje kompleksnih števil definiramo tako, da posebej seštejemo realna dela in posebej imaginarna dela:

$$(x+iy) + (u+iv) = (x+u) + i(y+v).$$

Če konjugiramo vsoto dveh kompleksnih števil, dobimo

$$\overline{(x+iy)+(u+iv)} = \overline{(x+u)+i(y+v)} = (x+u) - i(y+v) = (x-iy) + (u-iv),$$

torej velja

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}.$$

Zmnožimo dvočlenika $(x+iy)(u+iv)$ po zakonih, ki veljajo za realna števila. Tako dobimo $(x+iy)(u+iv) = xu + iyu + ixv + i^2yv$. Če pri tem upoštevamo še, da je i takšno število, da je $i^2 = -1$, sledi $(x+iy)(u+iv) = xu + iyu + ixv - yv = (xu-yv) + i(xv+yu)$. V skladu z razširitvijo množenja realnih števil definiramo produkt kompleksnih števil kot:

$$(x+iy)(u+iv) = (xu-yv) + i(xv+yu).$$

Izkaže se, da za tako definirani operaciji seštevanja in množenja veljajo pravila o zamenjavi, združevanju in razčlenjevanju členov, ki jih poznamo še na operacijah seštevanja in množenja realnih števil. Če konjugiramo produkt dveh kompleksnih števil, dobimo

$$\overline{(x+iy)(u+iv)} = \overline{(xu-yv)+i(xv+yu)} = (xu-yv) - i(xv+yu) = (x-iy)(u-iv),$$

torej velja

$$\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}.$$

Opazimo še, da je

$$(x+iy)(x-iy) = x^2 - ixy + ixy - i^2y^2 = x^2 + y^2 = |x+iy|^2,$$

oziroma, povedano drugače

$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}.$$

Deljenje kompleksnih števil je v praksi odprava imaginarnega dela v imenovalcu. To pomeni, da kvocient kompleksnih števil $\frac{x+iy}{u+iv}$ preuredimo tako, da števec in imenovalec pomnožimo s konjugirano vrednostjo imenovalca $u-iv$. S tem v imenovalcu pridobimo kvadrat njegove absolutne vrednosti u^2+v^2, torej realno število. Zato ta postopek imenujemo tudi *realizacija ulomka*.

PRIMER A.2.1. *Izračunaj vrednost izraza* $\frac{1}{2}(2+3i)(1-i) + \frac{2-i}{1-i}$.

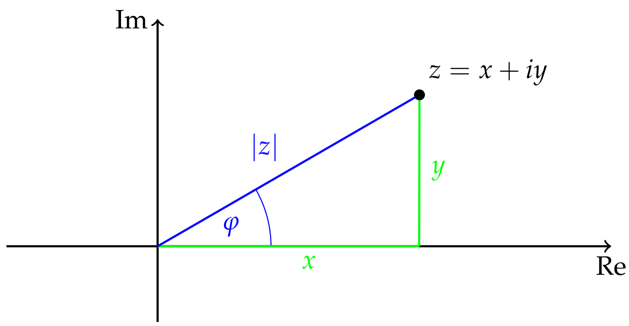
REŠITEV: *Produkt kompleksnih števil izračunamo po definiciji. Ulomek realiziramo, torej množimo števec in imenovalec z* $1+i$*, to je konjugirano vrednostjo imenovalca. Dobimo:*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(2+3i)(1-i) + \frac{2-i}{1-i} &= \frac{1}{2}(2-2i+3i-3i^2) + \frac{(2-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \\
&= \frac{1}{2}(5+i) + \frac{2+2i-i-i^2}{2} = \\
&= \frac{5+i}{2} + \frac{3+i}{2} = \\
&= \frac{8+2i}{2} = 4+i.
\end{aligned}$$

Ker velja $(x+iy)+(x-iy) = 2x$ ter $(x+iy)-(x-iy) = 2iy$, lahko izrazimo realni in imaginarni del kompleksnega števila kot

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2} \quad \text{in} \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}.$$

A.2.2. Polarni zapis kompleksnega števila. Kompleksno število smo v kompleksni ravnini predstavili s kartezičnima koordinatama x in y. Lahko pa vsako neničelno kompleksno število predstavimo tudi na drugačen način. Če za en parameter izberemo absolutno vrednost, ki nam pove oddaljenost števila od koordinatnega izhodišča, s tem ne določimo kompleksnega števila na enoličen način. Kompleksna števila z isto absolutno vrednostjo ležijo na krožnici. Da bi enolično podali točko na krožnici, moramo povedati, za kakšen kot je točka zavrtena glede na realno os. Ta kot bomo imenovali *polarni kot*.



Polarni kot je kot, ki ga krajevni vektor točke $z = x + iy \neq 0$ oklepa s pozitivnim delom realne osi. Pri tem velja
$$\tan \varphi = \frac{y}{x},$$
kot pa merimo v pozitivni smeri vrtenja.

Kot φ lahko pri tem zasede poljubne vrednosti in zato ni določen enolično. Če se omejimo na kote $\varphi \in [0, 2\pi)$, velja

$$\varphi = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & \text{če je } x > 0, \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, & \text{če je } x < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{če je } x = 0 \text{ in } y > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{če je } x = 0 \text{ in } y < 0. \end{cases}$$

S tem je polarni kot na $[0, 2\pi)$ določen enolično. V splošnem pa je kot določen do mnogokratnika kota 2π, torej sta dva polarna kota enaka, če se razlikujeta za večkratnik kota 2π.

PRIMER A.2.2. *Določi polarni kot kompleksnega števila* $1 + i$.

REŠITEV: *Število* $1 + i$ *ima tako realno kot imaginarno komponento pozitivno, zato je polarni kot* $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$. *Ker je*
$$\tan \varphi = \frac{1}{1} = 1,$$
je $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

PRIMER A.2.3. *Določi polarni kot kompleksnega števila $-1-i$.*

REŠITEV: *Za število $-1-i$ velja*

$$\tan\varphi = \frac{-1}{-1} = 1.$$

Spomnimo se, da je bil tudi v primeru A.2.2 tangens polarnega kota enak 1 za drugo kompleksno število. Ker sta tako realni kot imaginarni del števila $-1-i$ negativna, velja

$$\varphi = \arctan 1 + \pi = \frac{5\pi}{4}.$$

Absolutna vrednost $|z|$ in polarni kot φ enolično določata kompleksno število z, če $z \neq 0$. Koordinati $|z|$ ter φ imenujemo *polarni koordinati* kompleksnega števila z.

Če iz pravokotnega trikotnika na sliki na strani 153 izrazimo dolžini katet, dobimo

$$x = |z|\cos\varphi$$

in

$$y = |z|\sin\varphi.$$

S tem lahko kompleksno število $z = x + iy$ zapišemo kot

$$z = x + iy = |z|\cos\varphi + i|z|\sin\varphi = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Polarni zapis neničelnega kompleksnega števila $z = x + iy$ je

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

kjer je φ polarni kot kompleksnega števila z.

Dve kompleksni števili v polarni obliki sta enaki, če imata enaki absolutni vrednosti, polarna kota pa se razlikujeta za mnogokratnik 2π.

Geometrijsko nam vsa kompleksna števila $\cos\varphi + i\sin\varphi$ predstavljajo točke na enotski krožnici $|z| = 1$, saj je $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$. Zato iz polarnega zapisa $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ razberemo, da kompleksno število z leži na krožnici s središčem v koordinatnem izhodišču in s polmerom $|z|$, zavrteno pa je za kot φ v pozitivno smer glede na pozitivni del realne osi.

Ko več računamo s kompleksnimi števili, je smiselno vpeljati tudi oznako $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Ta nam polarni zapis skrajša v $z = |z|e^{i\varphi}$. Mi te oznake tu ne bomo uporabljali.

PRIMER A.2.4. *Zapišimo v polarni obliki število $\sqrt{3} - i$.*

REŠITEV: *Da bi zapisali število v polarni obliki, potrebujemo njegovo absolutno vrednost in polarni kot φ. Absolutna vrednost je enaka*

$$|\sqrt{3} - i| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2.$$

Ker je realni del števila $\sqrt{3} - i$ pozitiven, je polarni kot enak

$$\varphi = \arctan\frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6}.$$

Sedaj lahko zapišemo število $\sqrt{3} - i$ v polarni obliki kot

$$\sqrt{3} - i = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right).$$

Ko poznamo polarni zapis kompleksnega števila $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, lahko izračunamo tudi njegovo konjugirano vrednost. Če upoštevamo, da je funkcija kosinus soda, funkcija sinus pa liha, dobimo

$$\bar{z} = |z|(\cos\varphi - i\sin\varphi) = |z|(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)).$$

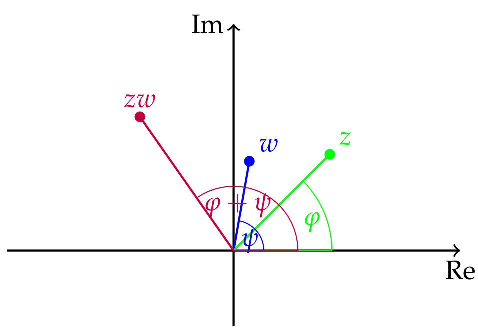
To se sklada z našo geometrijsko predstavo, da konjugiranje predstavlja zrcaljenje čez realno os. Pri tem se absolutna vrednost ohrani, kot φ pa se spremeni v $-\varphi$.

A.2.3. De Moivrova formula. Videli smo, da imamo z množenjem kompleksnih števil kar nekaj dela. Če pa kompleksni števili zapišemo v polarni obliki, je množenje lažje. Za števili $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ in $w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$ namreč velja

$$\begin{aligned} zw &= |z||w|(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\psi + i\sin\psi) = \\ &= |z||w|((\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi) + i(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi)) = \\ &= |z||w|(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)). \end{aligned}$$

To pomeni, če množimo kompleksni števili, je polarni kot produkta kar vsota polarnih kotov, absolutna vrednost produkta pa produkt absolutnih vrednosti:

$$\boxed{zw = |z||w|(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)).} \qquad \boxed{73}$$



Podobno je tudi deljenje kompleksnih števil bolj preprosto, če jih zapišemo v v polarnem zapisu kot

$$\boxed{\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}(\cos(\varphi-\psi) + i\sin(\varphi-\psi)).}$$

V posebnem, če v formuli $\boxed{73}$ izberemo $w = z$, dobimo

$$z^2 = |z|^2(\cos(2\varphi) + i\sin(2\varphi)).$$

S pomočjo popolne indukcije in formule 73 lahko pokažemo *de Moivrovo formulo*, ki nam pove, kako najlažje potenciramo kompleksna števila. Za vsako naravno število n namreč velja

$$z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)). \tag{74}$$

De Moivrova formula pove, da dobimo n-to potenco kompleksnega števila tako, da potenciramo njegovo absolutno vrednost, njegov polarni kot pa se pomnoži z n.

PRIMER A.2.5. *Za število $z = 1 + i\sqrt{3}$ izračunajmo z, z^2, z^3, z^4 in z^{101}.*

REŠITEV: *Najprej določimo polarni zapis števila $z = 1 + i\sqrt{3}$. Njegova absolutna vrednost je enaka*

$$|z| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2.$$

Ker je realni del števila z pozitiven, je polarni kot enak

$$\varphi = \arctan\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}.$$

Sedaj lahko zapišemo število $1 + i\sqrt{3}$ v polarni obliki kot

$$1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

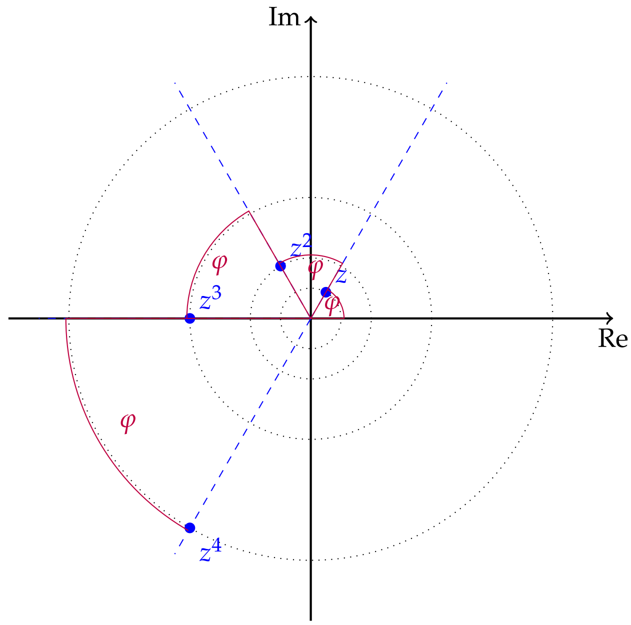
Po de Moivrovi formuli 74 velja

$$z^n = 2\left(\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)$$

za vsako naravno število n, torej v posebnem

$$\begin{aligned}
z^2 &= 2^2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = -2 + 2i\sqrt{3},\\
z^3 &= 2^3\left(\cos\left(\frac{3\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{3}\right)\right) = 8\left(\cos\pi + i\sin\pi\right) = -8,\\
z^4 &= 2^4\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = -8 - 8i\sqrt{3},\\
z^{101} &= 2^{101}\left(\cos\left(\frac{101\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{101\pi}{3}\right)\right) =\\
&= 2^{101}\left(\cos\left(17\cdot 2\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(17\cdot 2\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right) =\\
&= 2^{101}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2^{100}(1 - i\sqrt{3}).
\end{aligned}$$

Grafično je vsaka potenca z^n števila z zavrtena za polarni kot $\frac{\pi}{3}$ glede na potenco z^{n-1}.



S pomočjo de Moivrove formule lahko izračunamo tudi korene kompleksnega števila.

Število z je *n-ti koreni* števila $a \in \mathbb{C}$, če velja $z^n = a$.

Označimo $z = |z|(\cos\psi + i\sin\psi)$ in $a = |a|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ter zapišimo enačbo $z^n = a$ v polarni obliki. Pri tem upoštevajmo de Moivrovo formulo 74:

$$|z|^n(\cos(n\psi) + i\sin(n\psi)) = |a|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Vemo, da sta dve kompleksni števili enaki natanko tedaj, ko se ujemata njuni absolutni vrednosti

$$|z|^n = |a|,$$

njuna polarna kota pa se razlikujeta za celoštevilski večkratnik števila 2π,

$$n\psi = \varphi + 2k\pi,$$

kjer je $k \in \mathbb{Z}$. Če izrazimo $|z|$ ter ψ iz enačb, sledi

$$|z| = \sqrt[n]{|a|},$$

saj sta $|z|$ in $|a|$ obe pozitivni realni števili, in

$$\psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n},$$

kjer je $k \in \mathbb{Z}$. Ker je polarni kot določen do mnogokratnika kota 2π natančno, se rešitvi pri $k = 0$ ter $k = n$ ujemata. Zato dobimo le n različnih rešitev, in to za $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Enačba
$$z^n = a$$
ima n rešitev:
$$z_k = \sqrt[n]{|a|}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\right), \quad k=0,\ldots n-1.$$

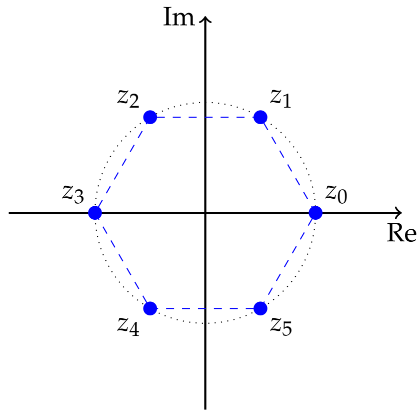
75

Vidimo, da se polarni koti rešitev razlikujejo za $\frac{2\pi}{n}$, vsi pa imajo enako absolutno vrednost. Zato rešitve ležijo na ogliščih pravilnega n-kotnika v kompleksni ravnini.

Izkaže se, da ima v množici kompleksnih števil vsak polinom stopnje n natanko n (ne nujno različnih) ničel.

PRIMER A.2.6. *Poiščimo in narišimo vsa kompleksna števila z, za katera velja $z^6 = 2$.*

REŠITEV: *Da bi lahko rešili enačbo $z^6 = 2$, moramo najprej zapisati desno stran 2 v polarni obliki. Absolutna vrednost števila 2 je 2, njegov polarni kot pa 0, saj je 2 pozitivno realno število. Zato rešujemo enačbo*
$$z^6 = 2(\cos 0 + i\sin 0).$$
Po formuli $\boxed{75}$ *je šest rešitev te enačbe enakih*
$$\begin{aligned} z_k &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{0+2k\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{0+2k\pi}{6}\right)\right) = \\ &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)\right)\end{aligned}$$
za $k = 0,1,2,3,4,5$. Če zapišemo vseh šest rešitev, dobimo
$$\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt[6]{2}(\cos 0 + i\sin 0) = \sqrt[6]{2} \\
z_1 &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt[6]{2}}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right) \\
z_2 &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt[6]{2}}{2}\left(-1+i\sqrt{3}\right) \\
z_3 &= \sqrt[6]{2}(\cos\pi + i\sin\pi) = -\sqrt[6]{2} \\
z_4 &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt[6]{2}}{2}\left(-1-i\sqrt{3}\right) \\
z_5 &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt[6]{2}}{2}\left(1-i\sqrt{3}\right).
\end{aligned}$$
Vseh šest rešitev ima absolutno vrednost enako $\sqrt[6]{2}$, zato ležijo na krožnici s polmerom $\sqrt[6]{2}$ s središčem v koordinatnem izhodišču. Vsaka naslednja rešitev je zavrtena za kot $\frac{\pi}{3}$ glede na prejšnjo, zato so rešitve natanko oglišča pravilnega šestkotnika.


Im
Re
z_0
z_1
z_2
z_3
z_4
z_5

DODATEK B

Kratek pregled elementarnih funkcij

V dodatku bomo na kratko pregledali elementarne funkcije in njihove lastnosti.

B.1. Polinom

Polinom stopnje n je funkcija oblike

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

kjer $a_n \neq 0$, $a_i \in \mathbb{R}$.

Lastnosti:

- $\mathcal{D}_p = \mathbb{R}$.
- a_n imenujemo *vodilni koeficient* polinoma p.
- Polinom $ax + b$ stopnje 1 je *linearna funkcija*, polinom $ax^2 + bx + c$ stopnje 2 pa *kvadratna funkcija*.
- Ko x narašča preko vseh meja, gre $p(x) \to \infty$, če je $a_n > 0$ in $p(x) \to -\infty$, če je $a_n < 0$. Obnašanje polinoma p, ko gre $x \to -\infty$ je odvisno od stopnje polinoma. Polinomi lihe stopnje imajo za zalogo vrednosti $\mathbb{R}$, medtem ko za polinome sode stopnje velja $\lim_{x \to -\infty} p(x) = \lim_{x \to \infty} p(x)$.
- Vsak polinom lahko faktoriziramo na linearne in nerazcepne kvadratne faktorje s koeficienti v $\mathbb{R}$. Zato ima vsak polinom stopnje n kvečjemu n realnih ničel. Določanje ničel polinomov je težek problem.
- Vsak polinom stopnje n lahko faktoriziramo na n linearnih faktorjev s koeficienti v $\mathbb{C}$.
- V ničlah sode stopnje ima polinom lokalni ekstrem in ohrani predznak, v ničlah lihe stopnje pa spremeni predznak.

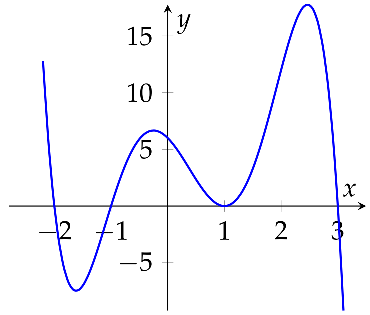
PRIMER B.1.1. *Nariši graf polinoma*

$$p(x) = -x^5 + 2x^4 + 6x^3 - 8x^2 - 5x + 6.$$

REŠITEV: *Če faktoriziramo polinom*

$$p(x) = -x^5 + 2x^4 + 6x^3 - 8x^2 - 5x + 6 = -(x-1)^2(x+2)(x+1)(x-3),$$

preprosto določimo ničle $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_{3,4} = 1$ in $x_5 = 3$ in tako je graf polinoma enak



B.2. Racionalna funkcija

Racionalna funkcija

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0}$$

je kvocient dveh polinomov.

Če predstavimo racionalno funkcijo v okrajšani obliki, kjer števec in imenovalec nimata skupnih faktorjev, potem veljajo naslednje lastnosti.

- Ničle imenovalca racionalne funkcije imenujemo *poli* racionalne funkcije.
- Definicijsko območje: $\mathcal{D}_r = \mathbb{R} \setminus \{\text{poli } r\}$
- Ničle racionalne funkcije so enake ničlam števca.
- Če je $n < m$, potem je $\lim\limits_{x\to\infty} r(x) = 0$ in $\lim\limits_{x\to-\infty} r(x) = 0$.
- Če je $n = m$, potem je $\lim\limits_{x\to\infty} r(x) = \frac{a_n}{b_m}$ in $\lim\limits_{x\to-\infty} r(x) = \frac{a_n}{b_m}$.
- Če je $n > m$, potem se racionalna funkcija r v neskončnosti približuje polinomu s, kjer je $p(x) = s(x)q(x) + o(x)$ in je stopnja polinoma o strogo manjša od stopnje polinoma q.

PRIMER B.2.1. *Narišimo graf racionalne funkcije* $r(x) = \frac{x^3+x^2}{x^2-4} = \frac{x^2(x+1)}{(x-2)(x+2)}$

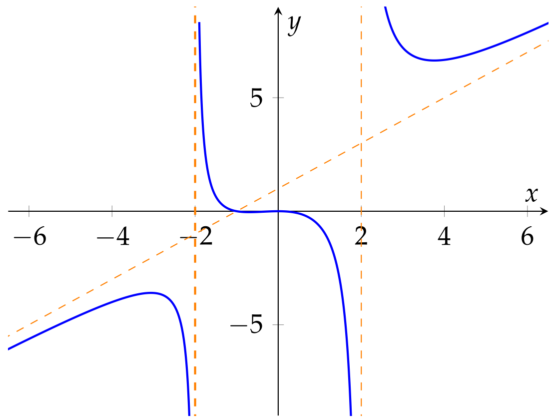
REŠITEV: *Funkcija r ima dvojno ničlo v točki 0 in enojno ničlo v točki -1, njena pola pa sta v točkah -2 in 2. Torej je $\mathcal{D}_r = \mathbb{R}\setminus\{-2, 2\}$.*

Ker je stopnja števca večja od stopnje imenovalca, moramo za asimptotično obnašanje funkcije r v neskončnosti izračunati kvocient števca in imenovalca:

$$\frac{x^3 + x^2}{x^2 - 4} = x + 1 + \frac{4x + 4}{x^2 - 4}.$$

Ker je $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x+4}{x^2-4} = 0$, se racionalna funkcija za zelo velike in zelo majhne x obnaša kot funkcija $y = x + 1$.

Iz teh podatkov lahko narišemo graf funkcije r:

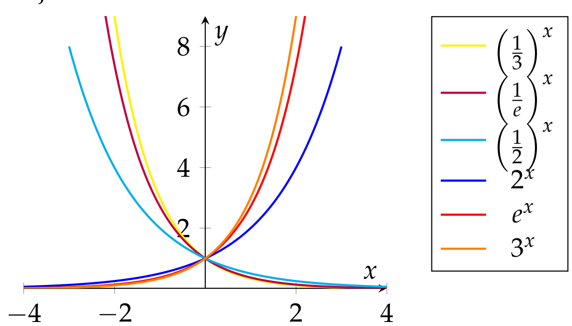


B.3. Eksponentna funkcija in logaritem

Eksponentna funkcija je funkcija oblike
$$f(x) = a^x,$$
kjer je a poljubno pozitivno realno število.

Eksponentna funkcija ima naslednje lastnosti:

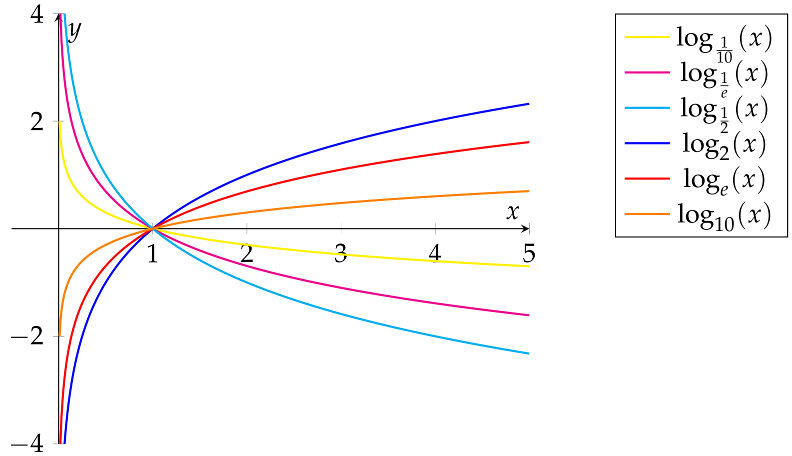
- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathcal{Z}_f = (0, \infty)$.
- Če je $a > 1$, je eksponentna funkcija naraščajoča, če je $0 < a < 1$, je padajoča.
- Eksponentna funkcija je injektivna za vsak $a \neq 1$ in $a^0 = 1$ za vse a.
- Najpogosteje uporabljamo osnovo e.



Inverzna funkcija eksponentni funkciji a^x, kjer $a \neq 1$, je *logaritem* z osnovo a.

Logaritem z osnovo a je funkcija
$$g(x) = \log_a x,$$
pri $a > 0, a \neq 1$, ki je inverzna eksponentni funkciji $f(x) = a^x$. Torej je
$$\log(e^x) = x \text{ in } e^{\log x} = x.$$

- Po definiciji je
$$a^x = y \text{ natanko tedaj, ko je } x = \log_a y.$$
- $\mathcal{D}_{\log_a} = (0, \infty)$, $\mathcal{Z}_{\log_a} = \mathbb{R}$.

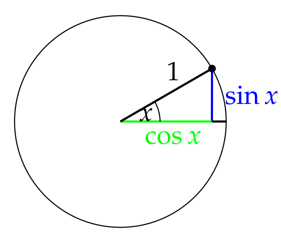


- $\log_a 1 = 0$ za vse $a > 0$, $a \neq 1$.
- Če je $a > 1$, je $\log_a$ naraščajoča, če je $0 < a < 1$, pa je $\log_a$ padajoča funkcija.
- Najpogosteje uporabljamo osnovo $a = e$. Tako funkcijo imenujemo *naravni logaritem* in jo krajše označimo tudi z $\log x$ ali $\ln x$. Čeprav je včasih z $\log x$ označen logaritem pri osnovi 10 ($\log_{10} x$), tu uporabljamo $\log x$ izključno za naravni logaritem.

Zveze, ki jih najpogosteje potrebujemo:
- $a^{x+y} = a^x a^y$,
- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$,
- $\log_a(x^\alpha) = \alpha \log_a x$,
- $\log(e^x) = x$ in $e^{\log x} = x$.

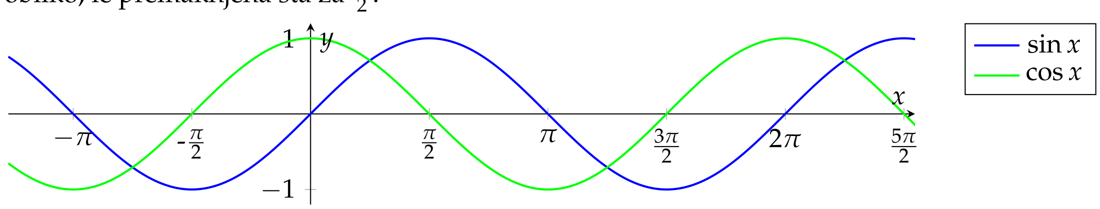
B.4. Kotne funkcije

Funkciji kosinus $\cos x$ in sinus $\sin x$ sta definirani kot prva oziroma druga koordinata točke na enotski krožnici, ki oklepa z abscisno osjo kot x.
Pri tem merimo kot x vedno v radianih.



Obe funkciji sta definirani za vse $x \in \mathbb{R}$ ($\mathcal{D}_{\sin} = \mathcal{D}_{\cos} = \mathbb{R}$), sta omejeni ($\mathcal{Z}_{\sin} = \mathcal{Z}_{\cos} = [-1, 1]$) in periodični s periodo 2π.

Ker velja $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$, imata njuna grafa enako obliko, le premaknjena sta za $\frac{\pi}{2}$:



Pri tem je sinus liha funkcija, kosinus pa soda funkcija.

Pogosto potrebujemo kvocient med sinusom in kosinusom:

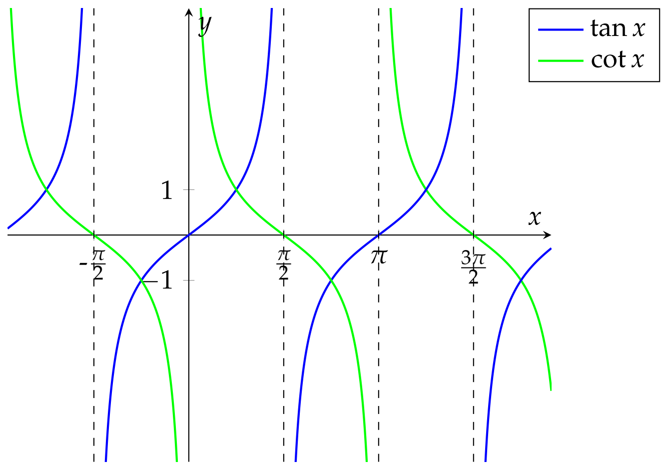
Funkciji *tangens* in *kotangens* definiramo kot:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Tako tangens kot kotangens sta definirana povsod razen v svojih polih:

$$\mathcal{D}_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \text{ in } \mathcal{D}_{\cot} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Sta neomejeni $\mathcal{Z}_{\tan} = \mathcal{Z}_{\cot} = \mathbb{R}$ in periodični s periodo π.



Med kotnimi funkcijami veljajo številne zveze. Nekaj jih je posledica periodičnosti, sodosti ali lihosti ter osnovnih definicij, kot na primer:

$$\begin{array}{ll}
\sin(x+2\pi) = \sin x & \cos(x+2\pi) = \cos x \\
\tan(x+\pi) = \tan x & \cot(x+\pi) = \cot x \\
\hline
\sin(-x) = -\sin x & \cos(-x) = \cos x \\
\tan(-x) = -\tan x & \cot(x) = -\cot x \\
\hline
\sin^2 x + \cos^2 x = 1 & \\
1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} & 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \\
\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x & \sin(\pi + x) = -\sin x \\
\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x & \cos(\pi + x) = -\cos x \\
\tan(\frac{\pi}{2} + x) = -\cot x &
\end{array}$$

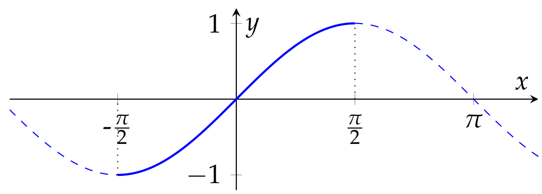
Še nekatere druge zveze, ki jih uporabljamo v geometriji ali pa pri teoretičnem računanju s kotnimi funkcijami, npr. pri integraciji, so:

$$\begin{array}{ll}
\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y & \sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y \\
\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y & \cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y \\
\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} & \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}
\end{array}$$

$\sin(2x) = 2\sin x\cos x$	$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$
$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$	$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$
$\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$	$\tan x = \frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}$
$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$	$\sin x\sin y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right)$
$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$	$\cos x\cos y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) + \cos(x+y)\right)$
$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$	$\sin x\cos y = \frac{1}{2}\left(\sin(x-y) + \sin(x+y)\right)$

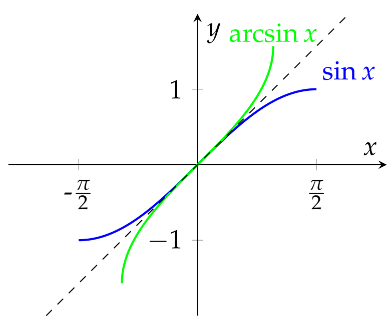
B.5. Ločne funkcije

Kotne funkcije niso injektivne, zato ne obstajajo njihove inverzne funkcije, če jih opazujemo na njihovem celem definicijskem območju. Če pa se omejimo na zoženo območje, kjer je posamezna kotna funkcija injektivna, lahko definiramo njen inverz.



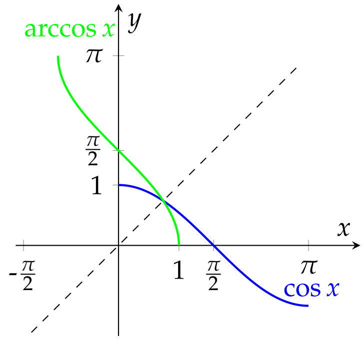
Ker je funkcija $\sin\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ injektivna, lahko definiramo inverzno funkcijo na tem zoženem intervalu.

> Funkcija *arkus sinus* je inverzna funkcija funkcije sinus na intervalu $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Torej je
> $$y = \arcsin x \quad \text{natanko tedaj, ko je} \quad \sin y = x$$
> za vse $x \in [-1, 1]$, $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.



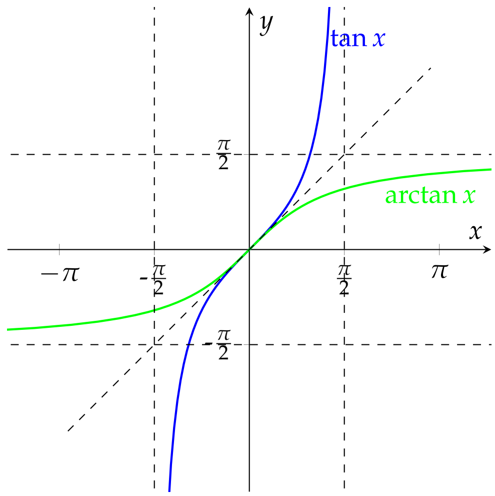
Podobno definiramo inverzno funkcijo funkcije kosinus, če omejimo definicijsko območje funkcije $\cos x$ na interval $[0, \pi]$.

> Funkcija *arkus kosinus* je inverzna funkcija funkcije kosinus na intervalu $[0, \pi]$. Torej je
> $$y = \arccos x \quad \text{natanko tedaj, ko je} \quad \cos y = x$$
> za vse $x \in [-1, 1]$, $y \in [0, \pi]$.



Tudi za zoženi injektivni funkciji tangens $\tan\colon \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ in kotangens $\cot\colon (0, \pi) \to \mathbb{R}$ lahko definiramo njima inverzni funkciji *arkus tangens* in *arkus kotangens*, kjer je

$$\mathcal{D}_{\text{arctan}} = \mathcal{D}_{\text{arccot}} = \mathbb{R},\ \mathcal{Z}_{\text{arctan}} = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \text{ in } \mathcal{Z}_{\text{arccot}} = (0, \pi).$$



Literatura

[1] G. Dolinar: *Matematika 1*, Založba FE in FRI, 2010.
[2] T. Košir: *Linearna algebra*, `http://www.fmf.uni-lj.si/~kosir/poucevanje/linalg.html`.
[3] B. Orel: *Linearna algebra*, Založba FE in FRI, `http://matematika.fri.uni-lj.si/LA/la1.pdf`, 2012.
[4] J. Stewart: *Calculus*, *Early transcendentals*, Cengage Learning, 2012.
[5] G. Strang: *Introduction to Linear Algebra*, Wellesley - Cambridge Press, Wellesley, 2009.
[6] G. Tomšič, B. Orel, N. Mramor Kosta: *Matematika 1*, Fakulteta za elektrotehniko: Fakulteta za računalništvo in informatiko, 2004.