Zbirka nalog iz Linearne algebre (v delu!)

uredil in zbral: Martin Vuk
avtorji nalog: Martin Vuk, Damjan Vrenčur, Janoš Vidali, Peter Kink in Damir Franetič

12. januar 2015

Kazalo

Poglavje 1

Uvod

1.1 Oznake

Če ni drugče povedano, bomo vektorje pisali kot stolpce z oglatimi oklepaji, vektorske spremeljivke pa z malimi odebeljenimi črkami

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}. \tag{1.1}$$

Za vektorje bomo včasih uporabili zapis z vrstico $\mathbf{a} = [1, 2, 3]^{\mathsf{T}}$, kjer oznaka $^{\mathsf{T}}$ pomeni *transponiranje* in spremeni vrstico v stolpec (in obratno).

Tabela 1.1: Tabela oznak

$\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{x}$	verktorji
$\overrightarrow{AB}$	vektor med točkama A in B
$\mathbf{r}_A$	radijalni vektor točke A
$\|\mathbf{a}\|$, $\|\mathbf{AB}\|$	dolžina vektorja
Σ	ravnina
p	premica
$A^{m\times n}$	matrika z m vrsticami in n stolpci
$C(A)$	stolpčni prostor matrike A
$N(A)$	ničelni prostor matrike A

Poglavje 2

Vektorji in matrike

2.1 Vektorji, geometrija v $\mathbb{R}^3$

1. Dani so vektorji
$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ in } \mathbf{c} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0.5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
Izračunaj naslednje izraze
   (a) $\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}$
   (b) $\mathbf{a}/2 + 2\mathbf{c}$
   (c) $\frac{1}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$.

   Katere operacije smo uporabili? Za vsako operacijo določi domeno, kodomeno in osnovne lastnosti.

2. Janez in Micka sta sestavila vsak svoj nakupovalni seznam

blago	količina	blago	količina
kruh	1/2 štruce	pivo	12 pločevink
mleko	2 l	klobase	6 parov
jogurt	12	kruh	2 štruci
čokoladice	10	jogurt	4

   (a) Zapiši seznama kot vektorja, poskrbi, da ju bo mogoče sešteti.
   (b) Kaj pomeni vsota in množenje omenjenih vektorjev s pozitivnimi števili?
   (c) Če je cenik podan s tabelo

blago	kruh	mleko	jogurt	čokoladice	pivo	klobase
cena(EUR)	1	1	0.2	0.6	1.6	2.2

   kako bi izračunal vrednost nakupa Micke in Janeza? Katero operacijo boš uporabil?

3. Dana sta vektorja
$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ in } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
   (a) Izračunaj linearno kombinacijo $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$.
   (b) Določi ploščino paralelograma napetega na vektorja **a** in **b**.
   (c) Poišči enačbo ravnine, ki gre skozi točko $A(1, 0, 1)$ in je vzporedna z vektorjema **a** in **b**.

4. Dana sta vektorja
$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ in } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$
   (a) Izračunaj vsoto $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, razliko $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ in linearno kombinacijo $\frac{1}{2}\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$.
   (b) Izračunaj skalarni produkt $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ in določi kot med vektorjema **a** in **b**.
   (c) Preiskusi svoje sposobnosti 3D risanja in nariši vektorje **a**, **b** in kombinacije iz točke (a).

5. Dan je trikotnik $\triangle ABC$, kjer je $A(1, 2, 0)$, $B(3, -2, 1)$ in $C(1, -1, 1)$.
   (a) Zapiši vektorje $\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AC}$ in $\overrightarrow{BC}$.
   (b) Izračunaj obseg trikotnika $\triangle ABC$.

6. Podane so točke $A(0, 1, 0)$, $B(2, 1, 1)$, $C(2, 1, 0)$ in $D(4, 5, 1)$.
   - Poišči enačbo premice, ki jo določata točki A in B. Določi razdaljo med to premico in točko C.
   - Poišči enačbo ravnine, ki jo določajo točke A, B in C. Izračunaj razdaljo med to ravnino in točko D.
   - Izračunaj ploščino trikotnika, ki ga določajo točke A, C in D.

7. V parametrični obliki zapiši enačbo premice, ki jo določa presek med ravninama
$$3x - y + 7z - 4 = 0 \quad \text{in} \quad 5x + 3y - 5z + 7 = 0.$$

8. Naj bo
$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ x \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}.$$
   Določi x, y in z, da bodo vektorji **a**, **b** in **c** paroma pravokotni ($\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, $\mathbf{a} \perp \mathbf{c}$ in $\mathbf{b} \perp \mathbf{c}$).

9. Določi enačbo ravnine z naslednjimi podatki
   (a) točko $T_0(0, 1, -2)$ in normalo $\mathbf{n} = [1, -2, 1]^\mathsf{T}$
   (b) točkami $A(1, 0, -1)$, $B(1, 2, 3)$ in $C(1, 1, 1)$.

10. Določi parametrične in implicitne enačbe premice z naslednjimi podatki

(a) točka $T(1,-1,0)$ in smerni vektor $\mathbf{e} = [1,1,3]^\mathsf{T}$
(b) točkama $A(1,0,1)$ in $B(2,1,2)$

11. Izračunaj razdaljo med
    (a) ravnino $x+2y-z=2$ in točko $A(1,2,3)$
    (b) premico $1-x=2(y-1)=z$ in točko $A(3,1,2)$

12. Opiši algoritem, s katerim bi izračunal naslednje razdalje
    (a) med ravnino in premico
    (b) med dvema vzporednima ravninama
    (c) med dvema mimobežnima premicama.

13. Poišči enačbo ravnine, ki je enako oddaljena od točk $A(2,-1,2)$ in $B(0,1,0)$.

14. Katera točka, ki leži na ravnini $x+2y+2z=6$, je najbližje koordinatnemu izhodišču?

15. Ravnine
$$x+y+z=3, \quad x+2y+3z=6 \quad \text{in} \quad 2x-y+z=2$$
se sekajo v točki T. Določi njene koordinate.

16. Poišči enačbo ravnine skozi točki $A(1,0,3)$ in $B(2,5,1)$, ki je pravokotna na ravnino $x+y+z=1$.

17. Poišči enačbo ravnine, ki je vzporedna z ravnino $5x-3y+2z=10$ in gre skozi točko $T(2,3,-1)$.

18. Poišči enačbo ravnine, ki gre skozi točko $T(-2,3,4)$ in odreže enake odseke na koordinatnih oseh.

19. Prezrcali premico $\mathbf{r} = [-2,1,0]^\mathsf{T} + \lambda\,[3,1,1]^\mathsf{T}$ čez ravnino $x=z$.

20. Poišči pravokotno projekcijo premice $x = \frac{y+1}{3} = z+1$ na ravnino $z=0$.

21. Presek ravnin z enačbama $2x+y-z=0$ in $3x-y+z=0$ je premica. Zapiši jo z enačbo.

22. Ravnini z enačbama $2x-3y+6z+8=0$ in $2x-3y+6z-6=0$ sta vzporedni. Izračunaj razdaljo med njima.

23. Izračunaj presečišče premice skozi točki $A(2,0,-1)$ in $B(0,5,4)$ z ravnino $4x-y-z+5=0$ in kot pod katerim premica prebada ravnino.

24. Dana je premica
$$p : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1}$$
in točki $A(0,1,1)$ in $B(0,2,4)$.
    (a) Izračunaj razdaljo točke A od premice p.
    (b) Določi enačbo premice skozi A in B.
    (c) Izračunaj razdaljo premice skozi A in B od premice p.

25. Podane so točke $A(1,2,1)$, $B(2,3,3)$, $C(4,3,4)$, in $E(3,2,2)$, ki predstavljajo oglišča paralepipeda $ABCDEFGH$, kjer je $ABCD$ spodnja ploskev in $EFGH$ zgornja ploskev.
    (a) Določi koordinate ostalih oglišč.
    (b) Izračunaj prostornino paralepipeda.
    (c) Izračunaj ploščine stranskih ploskev paralepipeda.
    (d) Izračunaj višine na stranske ploskve.
26. Dana so oglišča $A(1,0,0)$, $B(3,1,0)$, $D(0,2,0)$ in $E(2,1,2)$ paralepipeda $ABCDEFGH$. Določi še ostala oglišča parapipeda ter izračunaj njegov volumen in površino.
27. Naj bosta $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ vektorja z normo 1, ki oklepata kot $30°$. Določi prostornino paralelepipeda z robovi
$$\mathbf{c} = 3\mathbf{a} + \mathbf{b}, \quad \mathbf{d} = \mathbf{b} - 2\mathbf{a} \quad \text{in} \quad \mathbf{e} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} .$$
28. Premico določata točka $A(1,0,-7)$ in smerni vektor $\mathbf{p} = (3,-1,-2)$. Zapiši enačbe pravokotnih projekcij te premice na koordinatne ravnine, ki jih (paroma) določajo osi x, y in z.
29. Prezrcali premico, podano z enačbo
$$p : \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} , \quad z = 0$$
čez ravnino, ki jo opisuje enačba
$$\Sigma : 2x + y = 0 .$$
Izračunaj še razdaljo točke $T(1,-1,2)$ od premice p in ravnine Σ.
30. Točko $A(1,1,1)$ prezrcali čez premico, podano z enačbo
$$\frac{x}{2} = y - 3 = \frac{z}{2} .$$
31. Zapiši enačbi ravnin, ki razpolavljata kot med ravninama, določenima z enačbama $3x - y + 7z - 4 = 0$ in $5x + 3y - 5z + 7 = 0$.
32. Izračunaj razdaljo med točkama $A(1,2,3)$ in $B(2,7,1)$. Poišči enačbo premice, ki jo ti dve točki določata.
33. Izračunaj kot, pod katerim premica skozi točki $A(2,0,-1)$ in $B(0,5,4)$ prebada ravnino z enačbo $4x - y - z + 5 = 0$.
34. Podane so točke $A(1,2,1)$, $B(2,3,3)$, $C(4,3,4)$, in $D(3,2,2)$.
    - Dokaži, da te točke ležijo na skupni ravnini in poišči enačbo te ravnine.
    - Pokaži, da te točke napenjajo paralelogram in izračunaj ploščino tega paralelograma..

35. Podane so točke $A(1,0,0)$, $B(0,5,1)$ in $C(1,-1,1)$.
    - Poišči točko D, tako da bodo točke A, B, C in D določale paralelogram.
    - Izračunaj notranje kote in ploščino tega paralelograma.
36. Daljico med točkama $A(1,2)$ in $B(3,-2)$ razdeli na dva in tri enake dele. Izračunaj točko, ki leži na razpolovišču daljice in točki, ki daljico razdelita na tri enake dele.
37. Dane so točke $O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(1,0,2)$ in $B(-1,-1,0)$.
    (a) Izračunaj četrta oglišča paralelogramov, ki so napeti na pare vektorjev $\overrightarrow{OA}$ in $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA}$ in $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OB}$ in $\overrightarrow{OC}$.
    (b) Določi osmo oglišče paralelepipeda, ki je napet na vektorje $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ in $\overrightarrow{OC}$.
    (c) Izračunaj obseg trikotnika ABC.
38. Dani so vektorji $\mathbf{a} = [2,1]^\mathsf{T}$, $\mathbf{b} = [1,-2]^\mathsf{T}$ in $\mathbf{c} = [-2,3]^\mathsf{T}$.
    (a) Ali so vektorji paroma pravokotni?
    (b) Izračunaj kot med vektorjema $\mathbf{a}$ in $\mathbf{c}$.
39. Določi enačbo premic v ravnini, ki
    (a) gre skozi točki $A(1,-1)$, $B(2,0)$
    (b) je pravokotna na vektor $\mathbf{n} = [-1,2]^\mathsf{T}$ in gre skozi točko $T_0(1,2)$
    (c) je vzporedna vektorju $\mathbf{p} = [-1,2]^\mathsf{T}$ in gre skozi točko $T_0(2,1)$.
40. Za točke $A(1,1)$, $B(-2,1)$ in $C(1,0)$
    (a) določi simetrale daljic AB, AC in BC
    (b) izračunaj simetralo kota $\angle ABC$ (kot v oglišču B).
41. Ali točka $(0,2,1)$ leži na premici, ki gre skozi točki $(1,2,3)$ in $(3,2,1)$? Odgovor utemelji!
42. Dana sta vektorja $\mathbf{a} = [1,1,-1]^\mathsf{T}$ in $\mathbf{b} = [1,2,1]^\mathsf{T}$.
    (a) Ali sta $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$ pravokotna?
    (b) Določi koeficiente α in β, da bo linearna kombinacija $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$ pravokotna na $\mathbf{a}$.
    (c) Ali sta koeficienta α in β iz točke (b) enolično določena? Opiši množico vseh možnih vektorjev koeficientov $[\alpha,\beta]^\mathsf{T}$ v $\mathbb{R}^2$, za katere je $(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) \perp \mathbf{a}$.
    (d) Določi koeficiente α, β iz točke (b) tako, da bo $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$ dolžine 1 in $\mathbf{c} \perp \mathbf{a}$. Ali je $\mathbf{c}$ s tem enolično določen?
43. Podani so vektorji $\mathbf{a} = [1,2,3]^\mathsf{T}$, $\mathbf{b} = [2,-1,1]^\mathsf{T}$ in $\mathbf{c} = [1,1,7]^\mathsf{T}$.
    - Izračunaj projekcijo vektorja $\mathbf{a}$ na vektor $\mathbf{b}$.
    - Izračunaj norme (dolžine) vektorjev $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ in $\mathbf{c}$.
    - Izračunaj skalarni produkt $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ in vektorski produkt $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$.

- Izračunaj izraze $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$, $(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$ in $(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}$. Kaj ugotoviš? Ali se za tem morda skriva kakšno splošno pravilo? Razmisli.
- Ali sta katera dva izmed vektorjev **a**, **b** in **c** kolinearna? Ali so ti vektorji morda komplanarni?

44. Z računom se prepričaj, da za poljubna dva tridimenzionalna vektorja **a** in **b** velja $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = 0$. Premisli tudi, kako je to dejstvo razvidno iz geometrijskega pomena vektorskega in skalarnega produkta.

45. Podana sta vektorja $\mathbf{a} = [1, 2, 3]^\mathsf{T}$ in $\mathbf{b} = [2, -1, 7]^\mathsf{T}$. Poišči vektor **z** z normo enako 1, ki leži v ravnini, določeni z **a** in **b** ter je pravokoten na vektor **a**. Preden zapišeš in rešiš sistem enačb razmisli, koliko rešitev boš dobil.

46. Točke $A(-1, 1)$, $B(-3, -3)$ in $C(1, -1)$ so tri od štirih oglišč deltoida. Določi koordinate oglišča D, če je:

    (a) dolžina daljše diagonale v tem deltoidu enaka $5\sqrt{2}$,

    (b) dolžina obeh krajših stranic enaka 2.

    Kolikšna je ploščina deltoidov iz (a) in (b)?

47. Izračunaj kot med vektorjema $\mathbf{a} = [2, -2, 4]^\mathsf{T}$ in $\mathbf{b} = [2, 4, -2]^\mathsf{T}$. Kolikšna je ploščina trikotnika, ki ga ta dva vektorja določata? Poišči še vektor, ki v tem trikotniku predstavlja višino na **a**. Pomagaj si s projekcijo $\mathrm{proj}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b})$.

48. Dane so točke $A(1, 0, -3)$, $B(-1, 0, 1)$, $C(3, 2, 0)$ ter $D(3, 3, -2)$.

    (a) Prepričaj se, da vse štiri ležijo na isti ravnini. Poišči še enačbo te ravnine!

    (b) Naj bo p_1 premica, ki gre skozi A in B, p_2 pa premica, ki gre skozi C in D. Zakaj se ti dve premici sekata? Kolikšen je kot med njima?

    (c) Vzemimo točke A, B, C in D za oglišča osnovne ploskve štiristrane piramide. Vrh piramide je v točki $E(2, 3, 2)$. Kolikšna je prostornina te piramide? Kolikšna je višina iz E na osnovno ploskev $ABCD$?

    (d) Izračunaj površino piramide iz (c)!

49. Naj bo ABC trikotnik in T točka v prostoru. Za dano smer **e** določi pot svetlobnega žarka, ki izvira v točki T v smeri **e** in ugotovi, ali prebode trikotnik. Nalogo reši za $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$, $T(1, 1, 1)$ in $\mathbf{e} = [-1, 1, -1]^\mathsf{T}$. *Naloga je osnova za „Ray casting", ki se v grafiki uporablja, za izris realističnih slik.*

50. V prostoru so dane točke $A(1, 1, 2)$, $B(1, 2, 1)$, $C(2, 1, 1)$ in $D(2, 2, -1)$. Ugotovi, ali se daljici AB in CD sekata.

51. Končno zaporedje točk v ravnini $T_1, T_2, T_3, \ldots, T_n$ določa sklenjen poligon, ki ga omejujejo daljice $T_i T_{i+1}$ in $T_n T_1$. Napiši algoritem, ki za dano točko T ugotovi, ali je v notranjosti poligona.

52. Dane so točke $A(3, 2, 0)$, $B(2, 1, 2)$ in $C(4, 1, 6)$.

    (a) Določi premico p skozi točki A in B. Premico zapiši v parametrični in implicitni obliki.

    (b) Ali so točke A, B in C kolinearne?

(c) Poišči točko D na premici p, tako da bo vektor $\overrightarrow{CD}$ pravokoten na p. Nato določi razdaljo med točko C in premico p.

(d) Poišči zrcalno sliko C' pri zrcaljenju točke C čez premico p.

(e) Poišči točki P, Q na premici p, tako da bo $CPC'Q$ kvadrat.

53. Dane so točke $A(2,-3,0)$, $B(9,1,3)$ in $C(5,6,3)$. Poišči točko D, tako da bo $ABCD$ deltoid. Izračunaj še ploščino tega deltoida.

54. Dane so točke $A(1,0,-3)$, $B(-1,0,1)$, $C(3,2,0)$ in $D(4,2,-2)$.

(a) Prepričaj se, da vse štiri ležijo na isti ravnini. Poišči še enačbo te ravnine.

(b) Naj bo p premica, ki gre skozi A in B, q pa premica, ki gre skozi C in D. Zakaj se ti dve premici sekata? Kolikšen je kot med njima?

55. Dane so točke $A(2,3,1)$ $B(1,-1,1)$, $C(2,1,3)$ in $D(9,0,-4)$.

(a) Določi enačbo ravnine Σ, ki gre skozi točke A, B in C.

(b) Poišči ravnino skozi točko D, ki je vzporedna ravnini Σ.

(c) Določi razdaljo med ravnino Σ in točko D. Poišči še zrcalno sliko D' pri zrcaljenju točke D čez Σ.

56. Ravnina Σ_1 ima normalni vektor $\mathbf{n}_1 = [1,0,-3]^\mathsf{T}$ in vsebuje točko $T_1(1,2,3)$, ravnina Σ_2 pa normalni vektor $\mathbf{n}_2 = [2,2,0]^\mathsf{T}$ in vsebuje točko $T_2(0,-2,1)$. Ravnina Σ_3 ima enačbo $z = 1$. Poišči točko, v kateri se te tri ravnine sekajo.

57. Dane so točke $A(1,0,0)$, $B(2,1,1)$, $C(1,-2,1)$ in $D(2,1,2)$. Poišči točko P na premici AB in točko Q na premici CD, tako da bo vektor $\overrightarrow{PQ}$ pravokoten tako na premico AB kot na premico CD. Nato določi razdaljo med premicama AB in CD.

2.2 Matrike

1. Podani sta matriki.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 7 & 4 \\ -1 & 9 & 3 & -9 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & -7 & 3 \\ 2 & 1 & -8 \end{bmatrix}$$

Izračunaj produkta AB in BA.

2. Izračunaj vse smiselne produkte med spodnjimi vektorji in matrikami. Izračunaj še kak produkt, ki ima tri faktorje.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 7 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -9 \end{bmatrix} \qquad z = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -9 & -1 \end{bmatrix} \qquad u = \begin{bmatrix} 11 & -2 & 7 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$v = \begin{bmatrix} 4 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

3. Podane so naslednje matrike.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} \qquad z = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad u = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Na list papirja zapiši in izračunaj naslednje produkte med matrikami (toplo priporočamo, da nalogo rešite "na roke", brez uporabe računalnika).

$$AB \quad CA \quad Cy \quad Ax \quad zB \quad uC$$

$$CAB \qquad uCAx$$

4. Podani sta matriki.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 7 & 4 \\ -1 & 9 & 3 & -9 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & -7 & 3 \\ 2 & 1 & -8 \end{bmatrix}$$

- Izračunaj produkta AB in BA. Kaj ugotoviš? Ali produkt matrik v splošnem komutira?
- Preveri, da so naslednji trije načini izračuna produkta BA ekvivalentni
  - ij-ti element je skalarni produkt i-te vrstice matrike B in j-tega stolpca matrike A.
  - i-ti stolpec produkta je utežena linearna kombinacija stolpcev matrike B z utežmi iz i-tega stolpca matrike A.
  - j-ta vrstica produkta je linearna kombinacija vrstic matrike A, utežena z vrednostmi v j-ti vrstici matrike B.

5. Naj bo A zgornje trikotna matrika dimenzije 4×4 s členi oblike

$$a_{ij} = \frac{i}{j} \text{ za } i < j\,, \quad \text{sicer pa} \quad a_{ij} = 0\,.$$

Izračunaj potence A^2, A^3 in A^4. Kaj opaziš?

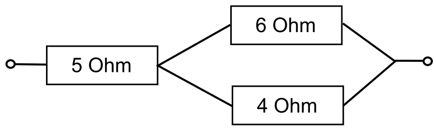
Poglavje 3

Linearni sistemi enačb

1. Na list papirja reši spodnji sistem enačb z uporabo Gaussove eliminacije.

$$\begin{aligned} x + 2y + 2z - w &= 7 \\ 4x - 8y + z + 2w &= -1 \\ 3y - 2z + w &= 2 \\ 3x - z + 3w &= 12 \end{aligned}$$

2. Na desni je skica povezav med upori v nekem elektronskem vezju. Padec napetosti med skrajnima sponkama je 37 V. Z uporabo Ohmovega in dveh Kirchhoffovih zakonov zapiši sistem enačb za tokove, ki tečejo čez posamezne upore in nato ta sistem enačb tudi reši.



3. Reši spodnji sistem enačb z uporabo Gaussove eliminacije.

$$\begin{aligned} x + 2y + 2z &= 1 \\ 4x + 8y + 9z &= 3 \\ 3y + 2z &= 1 \end{aligned}$$

4. Reši spodnji sistem enačb z uporabo Gaussove eliminacije.

$$\begin{aligned} x + y + 5z + w &= 4 \\ 2x + 2y + 4z + 3w &= 3 \\ 2x + 2z + w &= 1 \\ y + 3z + w &= 3 \end{aligned}$$

5. Poišči vse rešitve naslednjih sistemov enačb.

$$\begin{aligned} 2x - 4y + 1z &= 2 \\ -x + 3y - 4z &= -1 \\ 3x - 5y - 2z &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x - 4y + 1z &= 1 \\ -x + 3y - 4z &= 1 \\ 3x - 5y - 2z &= 1 \end{aligned}$$

6. Poišči enačbo ravnine skozi točke $A(-1,0,1)$ in $B(2,2,1)$ in $C(2,0,1)$.

7. Poišči polinom tretje stopnje, katerega graf gre skozi točke $A(-1,11)$, $B(0,5)$, $C(1,3)$ in $D(2,-1)$.

8. Poišči polinom tretje stopnje, katerega graf gre skozi točke $A(-1,-9)$, $B(1,3)$, $C(\frac{1}{2},-\frac{3}{8})$, $D(2,33)$,

9. Poišči vse rešitve naslednjih sistemov enačb.

$$\begin{aligned} 3x-4y+4z&=1 \\ 2x-3y+4z&=0 \\ 2x-2y+3z&=0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3x-4y+4z&=0 \\ 2x-3y+4z&=1 \\ 2x-2y+3z&=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x-4y+4z&=0 \\ 2x-3y+4z&=0 \\ 2x-2y+3z&=1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3x-4y+4z&=1 \\ 2x-3y+4z&=1 \\ 2x-2y+3z&=2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x-4y+4z&=1 \\ 2x-3y+4z&=2 \\ 2x-2y+3z&=3 \end{aligned}$$

Odgovor:

$$z=-\frac{2}{3}, y=-\frac{2}{3}, x=\frac{1}{3},$$
$$z=\frac{2}{3}, y=-\frac{1}{3}, x=-\frac{4}{3},$$
$$z=\frac{1}{3}, y=\frac{4}{3}, x=\frac{4}{3},$$
$$x=\frac{5}{3}, y=\frac{5}{3}, z=\frac{2}{3},$$
$$x=3, y=3, z=1$$

10. Na list papirja reši spodnji sistem enačb z uporabo Gaussove eliminacije.

$$\begin{aligned} x+2y+2z &= 1 \\ 4x+8y+9z &= 3 \\ 3y+2z &= 1 \end{aligned}$$

Odgovor: $x=1, x=1, z=-1$

11. Napiši računalniški program, ki z Gaussovo eliminacijo reši sistem linearnih enačb.

   - Napiši funkcijo `GaussElim(A,b)`, ki izvede Gaussovo eleminacijo na matriki A in desnem stoplcu $\mathbf{b}$ sistema enačb $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$. Funkcija naj kot rezultat vrne zgornje-trikotno matriko U in primerno spremenjen desni stolpec $\mathbf{d}$.

- Zapiši funkcijo `ObrVstavi(U,b)`, ki z obratnim vstavljanjem reši zgornjetrikotni sistem enačb $U\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
- Delovanje zapisanih funkcij preizkusi na sistemu enačb iz prejšnje naloge. Nato si s tema dvema funkcijama po potrebi pomagaj pri reševanju spodnjih nalog.

12. Popravi funkcijo `GaussElim` tako, da bo izvedla tudi pivotiranje. Novo funkcijo shrani kot GaussElimP. Preveri delovanje obeh funkcij na sistemu

$$\begin{aligned} 5x + 5y + z + w &= 4 \\ 2x + 2y + w &= 1 \\ 2x + 4y + 2z + 3w &= 3 \\ 3y + z + w &= 3 \end{aligned}$$

13. Dana sta matrika

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & -2 & 2 \\ -5 & 5 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

in vektor

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 12 \\ -3 \\ 15 \end{bmatrix}.$$

Koliko je rang matrike A? Poišči vse rešitve sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

14. Dani so matrika

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 0 & -5 & -5 \\ 7 & 0 & 7 & 1 & 2 \\ 15 & 4 & 7 & -9 & -8 \end{bmatrix}$$

in vektorja

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 20 \\ -7 \\ 13 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Kaliko je rang matrike A? Poišči vse rešitve sistemov $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$ in $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$.

15. Dani so matrika

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -4 & 5 & 0 \\ 4 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -6 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

in vektorja

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \\ 2 \\ -13 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Koliko je rang matrike A? Poišči vse rešitve sistemov $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$ in $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$.

16. Če sta $\mathbf{x}_1$ ter $\mathbf{x}_2$ rešitvi sistemov $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1$ in $A\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2$, potem je $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ rešitev sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$. Ali velja tudi obratno? Če je $\mathbf{x}$ rešitev sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$, ali lahko v splošnem rešitev zapišemo kot vsoto $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$, kjer sta sta $\mathbf{x}_1$ ter $\mathbf{x}_2$ rešitvi sistemov $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1$ in $A\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2$?

17. Dana sta matrika A in vektor b:
$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -6 \\ 3 & -2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$
Poišči vse rešitve sistema $Ax = b$.

18. Recimo, da imata matriki A in C to lastnost, da imata sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ in $C\mathbf{x} = \mathbf{b}$ enako splošno rešitev za vsak $\mathbf{b}$. Ali sta potem A in C enaki?

19. Poišči matriki A in B, ki imata naslednjo lastnost, ali pa razloži, zakaj takšna matrika ne obstaja.

    (a) Edina rešitev sistema
    $$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ je } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

    (b) Edina rešitev sistema
    $$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ je } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

20. Koliko rešitev ima sistem:
$$\begin{aligned} x_1 - 4x_2 - 2x_3 - 4x_4 + 4x_5 &= a \\ 3x_1 - 12x_2 - 6x_3 - 14x_4 + 14x_5 &= b \\ x_1 - 6x_2 - 2x_3 - 4x_4 + 2x_5 &= c \\ -x_1 + 10x_2 + 2x_3 + 10x_4 - 4x_5 &= d \end{aligned}$$

    (a) za vrednosti $a = -3, b = -7, c = -7, d = 9$ *Odgovor:* Neskončno: x_3, x_5 sta poljubna, $x_1 = 1 + 2x_3 - 4x_5, x_2 = 2 - x_5, x_4 = -1 + x_5$

    (b) za vrednosti $a = -3, b = -7, c = -7, d = 10$? *Odgovor:* sistem nima rešitev.

    Za oba primera poišči vse rešitve.

21. Poišči enačbo ravnine skozi točke $A(1,1,1)$, $B(2,1,1)$ in $C(3,2,1)$, tako da rešiš sistem enačb za a, b, c in d, ki ga dobiš z nastavkom za enačbo ravnine
$$ax + by + cz = d.$$
Odgovor: Ravnina je dana z enačbo $z = 1$.

22. Poišči enačbo ravnine skozi točke $A(1,2,3)$, $B(2,3,1)$ in $C(1,0,1)$. Zapiši sistem linearnih enačb za koeficiente a, b, c, d v splošni enačbi ravnine $ax + by + cz = d$. Koliko rešitev ima sistem? Ali je enačba ravnine enolična?

23. Poišči koeficiente a, b, c, d polinoma tretje stopnje

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

katerega graf gre skozi točke $A(-1, -9)$, $B(1, 3)$, $C(\frac{1}{2}, -\frac{3}{8})$, $D(2, 33)$. To pomeni, da je $p(-1) = 9$, $p(1) = 3$, ...

Odgovor: $a = 5, b = -2, c = 1, d = -1$

24. Izpelji formulo za izračun presečišča dveh premic z enačbama $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ in $a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Iz rešitve, ki jo dobiš izpelji pogoj, kdaj se premici ne sekata (sta vzporedni)?

Dodatna naloga: Napiši računalniški program, ki izračuna presečišče dveh premic v ravnini, ali pa vrne `False`, če premici nimata presečišča.

Odgovor: $x = -\frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$; $y = -\frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_2b_1 - a_1b_2}$. Premici sta vzporedni, če je $a_2b_1 - a_1b_2 = 0$.

25. Poišči rešitev matrične enačbe

$$AX = BB^\mathsf{T},$$

kjer sta dani matriki A in B

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Odgovor:

$$X = \begin{bmatrix} 25 & -18 & -30 \\ -30 & 24 & 30 \\ 10 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

26. Reši spodnji sistem linearnih enačb.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 9 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ x_2 - x_3 + x_4 &= 2 \end{aligned}$$

27. Trije trgovci na bazarju v Damasku ponujajo vsak svojo robo. Prvi ima 16 enakih biserov, drugi 10 smaragdov iste velikosti in kvalitete, tretji pa 8 obdelanih diamantov enakih tež in oblik. Med pogovorom ob opoldanskem čaju ugotovijo zanimivo stvar: če bi vsak od njih dal drugima dvema po dva svoja žlahtna kamna, bi glede na trenutne vrednosti valut imeli vsi trije robo enake skupne vrednosti.

Ali lahko ugotoviš razmerja med trenutnimi cenami biserov, smaragdov in diamantov?.

28. Z Gauss-Jordanovo eliminacijo izračunaj inverz matrik

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \text{ in } B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 4 & 0 \\ -8 & 8 & -8 & -8 \end{bmatrix},$$

če seveda obstajata.

Če velja $AX = I$, ali velja tudi $XA = I$? Kako to vidimo iz postopka Gauss-Jordanove eliminacije?

29. Na list papirja reši spodnji sistem enačb z uporabo Gaussove eliminacije.

$$\begin{aligned} x + 2y + 2z &= 1 \\ 4x + 8y + 9z &= 3 \\ 3y + 2z &= 1 \end{aligned}$$

30. Poišči vse rešitve naslednjih treh sistemov enačb:

$$\begin{aligned} 3x - 4y + 4z &= 1 \\ 2x - 3y + 4z &= 0 \\ 2x - 2y + 3z &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3x - 4y + 4z &= 0 \\ 2x - 3y + 4z &= 1 \\ 2x - 2y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x - 4y + 4z &= 0 \\ 2x - 3y + 4z &= 0 \\ 2x - 2y + 3z &= 1 \end{aligned}$$

Odgovor: $z = -\frac{2}{3}, y = -\frac{2}{3}, x = \frac{1}{3}, z = \frac{2}{3}, y = -\frac{1}{3}, x = -\frac{4}{3}, z = \frac{1}{3}, y = \frac{4}{3}, x = \frac{4}{3}$

31. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

in vektor $b = [0, 1, 1]^T$.

(a) Izračunaj determinanto matrike A. *Odgovor:* $\det A = -10$

(b) Poišči rešitev enačbe $Ax = b$. *Odgovor:* $x = [0, \frac{1}{2}, 0]^\mathsf{T}$

32. Reši sistem enačb

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 3 \\ x + 2y + z &= 0 \\ x + y + 2z &= 9. \end{aligned}$$

33. Poišči vse rešitve sistema enačb

$$Ax = b$$

za naslednje pare A in b:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ in $b = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ in $b = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ a \end{bmatrix}$. Poišči a, pri katerem je sistem rešljiv.

(c) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ in $b = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

34. Prepričaj se, da lahko poljuben vektorj na ravnini $x - y + 2z = 0$ zapišemo kot linearno kombinacijo vektorjev

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Zapiši vektor $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}^T$ kot linearno kombinacijo zgornjih dveh vektorjev.

35. Poišči presečišče ravnine $x + y + z = 1$ in premice $x + 1 = \frac{y-1}{2} = 1 - 2z$.

36. Kaj je presečišče ravnin $x - y + 2z = 0$ in $2x + y - z = 0$. Zapiši množico P vseh točk v $\mathbb{R}^3$, ki leži na obeh ravninah. Ali je množica P vektorski podprostor v $\mathbb{R}^3$? Kako ga lahko opišemo z enim vektorjem?

37. Izraz $\sin(x + \frac{\pi}{3})$ je mogoče zapisati kot linearno kombinacijo $A \sin x + B \cos x$. Zapiši linearni sistem za A in B in ga reši.

38. Poišči polinom čim nižje stopnje $p(x)$, ki zadošča pogojem

$$\begin{aligned} p(0) &= 2 \\ p(1) &= 2 \\ p(2) &= -1 \\ p(3) &= 2. \end{aligned}$$

Kako problem prevedeš na reševanje sistema linearnih enačb? Kaj ti sistem enačb pove o številu rešitev?

39. Ulomek

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)(x+2)}$$

razstavi na parcialne ulomke.

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}$$

Sistem linearnih enačb lahko dobiš na dva načina. Kako se sistema razlikujeta?

3.1 LU razcep

1. Izračunaj LU razcep za naslednjo matriko

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

2. Izračunaj LU razcep matrike

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   in nato reši sistem $Ax = b$ za 3 različne vektorje b.

3. Napiši računalniški program (funkcijo `lu(A)`), ki izračuna LU razcep matrike A brez pivotiranja. Funkcija naj vrne eno samo matriko B, v kateri naj bodo shranjeni le neničelni elementi L in U. Ker so na diagonali L enice, naj bodo na diagonali B elementi matrike U.

   Napiši tudi funkciji `dir_vstavi(B,b)` in `obr_vstavi(B,y)`, ki rešita trikotna sistema $Ly = b$ in $Ux = y$. Matriki L in U naj bosta shranjeni v B, kot pri funkciji `lu`.

4. Z LU razcepom reši sistem z matriko A

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

   in desnimi stranmi $[1, 0, 1, 0]^\mathsf{T}$ in $[0, 1, 1, 1]^\mathsf{T}$.

5. Popravite program `lu`, tako da uporabi delno pivotiranje. Klic funkcije naj bo oblike `[B,p]=lu(A)`, kjer matrika B vsebuje faktorje L in U. Vektor p pa naj označuje indekse vrstic, ki smo jih zamenjali.

   Ustrezno popravi tudi `dir_vstavi` in `obr_vstavi`.

Poglavje 4

Rešene naloge

1. V prostoru $\mathbb{R}^3$ so dane točke $A(0,0,0)$, $B(0,1,2)$ in $C(2,0,1)$.

   (a) Poišči enačbo ravnine, v kateri ležijo točke A, B in C.

   (b) V kateri točki premica, ki je dana z enačbo

   $$x - 1 = y - 1 = -z,$$

   prebada notranjost trikotnika $\triangle ABC$?

Rešitev: Izračunamo normalo. Normala je enaka $\mathbf{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \mathbf{r_B} \times \mathbf{r_C} = [1,4,-2]$ in enačba ravnine je oblike

$$x + 4y - 2z + d = 0.$$

Ker gre ravnina tudi skozi izhodišče $A(0,0,0)$, je $d = -(x + 4y - 2z) = 0$. Enačba ravnine se glasi

$$x + 4y - 2z = 0.$$

Izračunamo presečišče premice in ravnine. Rešiti moramo torej sistem 3 enačb s tremi neznankami

$$\begin{aligned} x + 4y - 2z &= 0 \\ x - 1 &= y - 1 \\ x - 1 &= -z, \end{aligned}$$

ki je po preureditvi enak

$$\begin{aligned} x + 4y - 2z &= 0 \\ x - y &= 0 \\ x + z &= 1 \end{aligned}$$

in ima rešitev $x = y = \frac{2}{7}$, $z = \frac{5}{7}$ in presečišče je točka $P(\frac{2}{7}, \frac{2}{7}, \frac{5}{7})$.

2. Dana je matrika A ter vektor b:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -6 \\ 3 & -2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Poišči vse rešitve sistema $Ax = b$.
Rešitev:
Naredimo Gauss-Jordanovo eliminacijo matrike A razširjene z vektorjem b

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -6 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{12}{7} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{7} \end{bmatrix}.$$

Posebno rešitev najlažje dobimo tako, da x_3 postavimo na nič

$$x_1 = \frac{12}{7}, x_2 = \frac{3}{2}, x_3 = 0, x_4 = \frac{2}{7},$$

rešitev homogene enačbe pa hitro preberemo in je enaka

$$x_h = C \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Splošna rešitev sistema je enaka

$$x = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 12 \\ 10.5 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + C \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. Dana sta matrika

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

in vektor

$$b = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 15 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Kakšen je rang matrike A? Poišči vse rešitve sistema $Ax = b$.

Rešitev: Rešitve sistema dobimo z Gauss-Jordanovo eliminacijo. Rang matrike A je 2, splošna rešitev sistema $Ax = b$, pa je

$$x = \begin{bmatrix} -\frac{23}{2} \\ -\frac{7}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} -\frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$