Rešene naloge iz Finančne matematike 2

Peter Kink

17. februar 2021

Kazalo

Poglavje 1

Martingali, Brownovo gibanje, izrek o ustavljanju

1 Naloga

Naj bo B standardno Brownovo gibanje. Definirajte za $\lambda \in \mathbb{R}$

$$M_t = e^{2\lambda^2 \int_0^t B_s^2 ds} \cos\left(\lambda\left(B_t^2 - t\right)\right) \quad \text{in} \quad N_t = e^{2\lambda^2 \int_0^t B_s^2 ds} \sin\left(\lambda\left(B_t^2 - t\right)\right).$$

1. Pokažite, da sta procesa M in N lokalna martingala.
2. Definirajte za $a > 0$

   $$T_a = \inf\{t \geq 0 \colon 4\int_0^t B_s^2 ds > a\}.$$

   Utemeljite, da je T_a čas ustavljanja in sta procesa

   $$\tilde{M}_t = M_{t\wedge T_a} \quad \text{in} \quad \tilde{N}_t = N_{t\wedge T_a}$$

   martingala.
3. Privzemite kot znano, da je $P(T_a < \infty) = 1$. Pokažite, da je

   $$E\left(M_{t\wedge T_a}\right) = 1 \quad \text{in} \quad E\left(N_{t\wedge T_a}\right) = 0.$$

   Sklepajte, da je

   $$E\left(M_{T_a}\right) = 1 \quad \text{in} \quad E\left(N_{T_a}\right) = 0.$$
4. Dokažite, da je $B_{T_a}^2 - T_a \sim \mathrm{N}(0, a)$.

2 Naloga

Naj bosta B in D neodvisni Brownovi gibanji glede na filtracijo $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Definirajte za $a > 0$

$$T_a = \inf\{t \geq 0 : \int_0^t (B_s^2 + D_s^2)ds \geq a\}.$$

Kot znano privzemite, da je $P(T_a < \infty) = 1$. Definirajte za $\lambda \in \mathbb{R}$

$$M_t = e^{\frac{\lambda^2}{2}\int_0^t (B_s^2+D_s^2)ds} \cos(\lambda B_t D_t) \quad \text{in} \quad N_t = e^{\frac{\lambda^2}{2}\int_0^t (B_s^2+D_s^2)ds} \sin(\lambda B_t D_t).$$

1. Pokažite, da sta M in N lokalna martingala.
2. Utemeljite, da je
$$E\left(M_{t\wedge T_a}\right) = 1 \qquad \text{in} \qquad E\left(N_{t\wedge T_a}\right) = 0.$$
3. Utemeljite, da je
$$B_{T_a} D_{T_a} \sim \mathrm{N}(0, a).$$
Namig: Izračunajte $E\left(M_{T_a}\right)$ in $E\left(N_{T_a}\right)$.

3 Naloga

Naj bo B standardno Brownovo gibanje in definirajte proces X kot

$$X_t = B_t^3 - 3tB_t.$$

1. Pokažite, da je X lokalni martingal in izrazite $\langle X \rangle$.
2. Pokažite, da sta procesa
$$M_t = e^{\frac{9\lambda^2}{2}\int_0^t (B_s^2-s)^2 ds} \cos(\lambda X_t) \quad \text{in} \quad N_t = e^{\frac{9\lambda^2}{2}\int_0^t (B_s^2-s)^2 ds} \sin(\lambda X_t)$$
lokalna martingala.
3. Naj bo
$$T = \inf\{t \geq 0 : 9\int_0^t (B_s^2 - s)^2 ds > 1\}.$$
Utemeljite, da je
$$E[M_T] = 1 \quad \text{in} \quad E[N_T] = 0.$$
Privzemite, da je $P(T < \infty) = 1$.
4. Kakšna je porazdelitev slučajne spremenljivke X_T?

4 Naloga

Naj bo B standardno Brownovo gibanje. Kot znano privzemite, da obstaja zvezen nepadajoč Brownovi filtraciji prilagojen proces L, da je $L_0 = 0$ in je

$$M_t = |B_t| - L_t$$

martingal glede na Brownovo filtracijo. Za $a, b > 0$ definirajte

$$T_{a,b} = \inf\{t \geq 0\colon B_t \in \{-b, a\}\}.$$

1. Skrbno utemeljite, da je $E\left(|B_{T_{a,b}}|\right) = E(L_{T_{a,b}})$.
2. Izračunajte $E\left(L_{T_{a,b}}\right)$.

5 Naloga

Naj bo B standardno Brownovo gibanje glede na filtracijo $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Za $a > 0$ definirajte čas ustavljanja

$$T_a = \inf\{t \geq 0\colon |B_t| = a\}.$$

Privzemite, da je $P(T_a < \infty) = 1$. Definirajte

$$X = \int_0^{T_a} B_t^2 \, dt.$$

1. Pokažite, da je
$$M_t = B_t^4 - 6\int_0^t B_s^2 \, ds$$
martingal.
2. Izračunajte $E(X)$. Utemeljite vse korake.

6 Naloga

Naj bosta B in D neodvisni Brownovi gibanji glede na filtracijo $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Definirajte

$$M_t = B_t^2 - t \qquad \text{in} \qquad N_t = D_t^2 - t.$$

1. Utemeljite, da je produkt MN martingal.
2. Naj bo $T = \inf\{t \geq 0\colon B_t^2 + D_t^2 = 1\}$. Utemeljite, da je $P(T < \infty) = 1$ in uporabite simetrijo za izračun $E(B_T^2 D_T^2)$.

   Namig: utemeljite, zakaj imata para (B_T, D_T) in $(\cos(U), \sin(U))$, kjer je U enakomerno porazdeljena na $[0, 2\pi)$, enako porazdelitev.

3. Utemeljite, da je $E(T) < \infty$ in
$$E[M_T N_T] = E(B_T^2 D_T^2) - E(T) + E(T^2).$$
Izračunajte $\mathrm{var}(T)$.

Namig: $M+N$ je martingal.

7 Naloga

Naj bo B standardno Brownovo gibanje. Za vsak $x \in \mathbb{R}$ definirajte
$$T_x = \inf\{t \geq 0 \colon B_t = x\}.$$

1. Naj bosta $a, b > 0$ in $T = T_a \wedge T_{-b}$. Naj bo $\alpha \in \mathbb{R}$. Poiščite tako linearno kombinacijo $X = \beta M + \gamma N$ martingalov
$$M_t = e^{\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2} t} \qquad \text{in} \qquad N_t = e^{-\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2} t},$$
da bo
$$X_T \cdot 1(T_{-b} < T_a) = 0.$$
2. Utemeljite, da je
$$E(X_T) = E(X_T 1(T_a < T_{-b})).$$
3. Izračunajte
$$E\left[e^{-\frac{\alpha^2}{2} T_a} \cdot 1(T_a < T_{-b})\right].$$

8 Naloga

Naj bosta B in D neodvisni standardni Brownovi gibanji glede na filtracijo $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Definirajte
$$M_t = B_t^4 - 6B_t^2 D_t^2 + D_t^4$$

1. Pokažite, da je M martingal.
2. Naj bo $T = \inf\{t \geq 0 \colon B_t^2 + D_t^2 = 1\}$. Utemeljite, da je $P(T < \infty)$ in uporabite M za izračun $E(B_T^2 D_T^2)$.

9 Naloga

Naj bo B standardno Brownovo gibanje. Naj bo $T = \inf\{t \geq 0 \colon B_t \in \{a, -b\}\}$ za $a, b > 0$.

1. Utemeljite, da je $M_t = B_t^3 - 3tB_t$ martingal. Izračunajte $\mathrm{cov}(B_T, T)$.
2. Pokažite, da je $N_t = B_t^4 - 6tB_t^2 + 3t^2$ martingal. Izračunajte $\mathrm{cov}(B_T^2, T)$.

Poglavje 2

Itôvi integrali, stohastične diferencialne enačbe

10 Naloga

Naj bo B standardno Brownovo gibanje. Definirajte

$$\mathcal{E}(B)_t = e^{B_t - \frac{1}{2}t}$$

in

$$Y_t = \mathcal{E}_t(B) \int_0^t \mathcal{E}(B)_s^{-1} \left(B_s dB_s - B_s ds\right).$$

1. Pokažite, da je
$$dY_t = (Y_t + B_t) dB_t.$$

2. Pokažite, da Y ustreza enačbi
$$Y_t = \int_0^t Y_s dB_s + \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} t.$$

11 Naloga

Naj bo B standardno Brownovo gibanje in označimo tekoči maksimum z

$$\bar{B}_t = \max_{0 \le s \le t} B_s.$$

Privzemite, da je filtracija kar naravna filtracija Brownovega gibanja.

1. Pojasnite enakost
$$\bar{B}_T = \max\left(\bar{B}_t, B_t + \max_{0 \le s \le T-t} (B_{t+s} - B_t)\right).$$

Sklepajte, da je za $t < T$

$$E(\bar{B}_T|\mathcal{F}_t) = F(B_t, \bar{B}_t, t)$$

za neko funkcijo $F(x, y, t)$ definirano za $x \leq y$.

2. Izračunajte $F(x, y, t)$ za $t < T$.
3. Poiščite prilagojen proces H, da bo

$$E\left[\int_0^T H_s^2 ds\right] < \infty$$

in

$$\bar{B}_T = E(\bar{B}_T) + \int_0^T H_s dB_s .$$

Namig: Definirajte $M_t = E(\bar{B}_T|\mathcal{F}_t) = F(B_t, \bar{B}_t, t)$*. Utemeljite, da je* M *zvezen martingal na* $[0, T]$ *in uporabite Itôvo formula za* $F(B_t, \bar{B}_t, t)$ *za* $t < T$.

12 Naloga

Naj bosta $\mu(t)$ in $\sigma(t)$ dani zvezni funkciji na intervalu $[0, T]$. Proces S naj ustreza stohastični diferencialni enačbi

$$dS_t = S_t \left(\sigma(t) dB_t + \mu(t) dt\right) .$$

Definirajte

$$X_t = S_t \exp\left(-\int_0^t \mu(s) ds - \int_0^t \sigma(s) dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(s) ds\right).$$

1. Definirajte

$$Y_t = \exp\left(-\int_0^t \mu(s) ds - \int_0^t \sigma(s) dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(s) ds\right).$$

Pokažite, da je

$$d\langle S, Y\rangle_t = -\sigma(t)^2 S_t Y_t dt .$$

2. Izračunajte dX_t in uporabite rezultat, da najdete S_t pri začetnem pogoju $S_0 = 1$.

13 Naloga

Prilagojen zvezen proces S naj ustreza enačbi

$$S_t = S_0 + \int_0^t \mu(B_s, s) S_s ds + \int_0^t \sigma(B_s, s) S_s dB_s ,$$

kjer sta μ in σ zvezni deterministični funkciji in je $S_0 \in (0, \infty)$.

1. Privzemite, da je $S_t > 0$ za vse $0 \leq t \leq T$. Pokažite, da velja

$$\int_0^T \sigma^2(B_s, s)ds = -2\log\left(\frac{S_T}{S_0}\right) + \int_0^T \frac{2}{S_s} dS_s .$$

2. Izračunajte stohastični diferencial procesa

$$Y_t = S_t \exp\left(-\int_0^t \sigma(B_s, s)dB_s + \int_0^t \left(\frac{\sigma^2(B_s, s)}{2} - \mu(B_s, s)\right)ds\right).$$

   Sklepajte, da je $S_t > 0$ s.g. za vse $0 \leq t \leq T$.

14 Naloga

Kot znano privzemite, da je za $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ in $z \in \mathbb{R}$

$$E\left(|z+Z|\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-z^2/2} + z\,\mathrm{Erf}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right),$$

kjer je

$$\mathrm{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-s^2} ds$$

funkcija napak. Naj bo B standardno Brownovo gibanje glede na filtracijo $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

1. Za $0 \leq t < T$ izračunajte

$$E\left(|B_T| \middle| \mathcal{F}_t\right).$$

2. Poiščite proces H, da bo veljalo

$$|B_T| = E\left(|B_T|\right) + \int_0^T H_s dB_s .$$

   Utemeljite korake.

15 Naloga

Prilagojen zvezen proces X naj ustreza stohastični diferencialni enačbi

$$dX_t = (1 + X_t)dt + X_t dB_t$$

in začetnemu pogoju $X_0 = 0$.

1. zračunajte

$$d\left(e^{-B_t - \frac{t}{2}} X_t\right).$$

2. Izrazite proces X eksplicitno z B (z ustreznim integralom).

16 Naloga

Označite

$$M_t = e^{-B_t + \frac{1}{2}t}.$$

Definirajte

$$Y_t = e^{B_t - \frac{1}{2}t} \int_0^t e^{-B_s + \frac{1}{2}s} \left(2B_s dB_s + (1 - 2B_s) ds\right).$$

kjer je B standardno Brownovo gibanje.

1. Pokažite, da je

$$\int_0^t M_s B_s dB_s = -M_t B_t + \int_0^t M_s dB_s + \int_0^t M_s B_s ds - \int_0^t M_s ds.$$

   Namig: Izračunajte dM_t.

2. Pokažite, da je

$$\int_0^t Y_s dB_s = Y_t - B_t^2.$$

   Namig: Izračunajte dM_t^{-1} in dY_t.

17 Naloga

Naj bo $0 \leq t \leq T$ in B standardno Brownovo gibanje. Definirajte

$$X_t = e^{-\lambda \int_0^t f(B_s) ds}$$

za zvezno in omejeno funkcijo $f(x)$.

1. Utemeljite, da je

$$E(X_T | \mathcal{F}_t) = X_t F(B_t, t),$$

   kjer je

$$F(x,t) = E\left[e^{-\lambda \int_0^{T-t} f(x + B_u) du}\right].$$

2. Privzemite, da je $F(x,t)$ dvakrat zvezno odvedljiva v x. Pokažite, da velja s.g.

$$X_T = E(X_T) + \int_0^T X_s \frac{\partial F}{\partial x}(B_s, s) dB_s.$$

18 Naloga

Prilagojen zvezen proces X naj zadošča stohastični diferencialni enačbi

$$dX_t = \mu dt + \sigma X_t dB_t$$

z $X_0 = 1$ in $\sigma > 0$.

1. Definirajte

$$Z_t = e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2} t}.$$

   Izračunajte $d(XZ)_t$.

2. Poiščite eksplicitno rešitev stohastične diferencialne enačbe.

19 Naloga

Zvezna prilagojena procesa X in Y naj ustrezata začetnima pogojema $X_0 = 1$ in $Y_0 = 0$ ter enačbama

$$\begin{aligned} dX_t &= \alpha X_t dt - Y_t dB_t \\ dY_t &= \alpha Y_t dt + X_t dB_t, \end{aligned}$$

kjer je B standardno Brownovo gibanje. Naj bo $R_t = X_t^2 + Y_t^2$.

1. S pomočjo Itôve formule pokažite, da je

$$R_t = e^{(2\alpha+1)t}.$$

2. S pomočjo Itôve formule pokažite, da je

$$X_t Y_t = 2\alpha \int_0^t X_s Y_s ds + \int_0^t (X_s^2 - Y_s^2) dB_s - \int_0^t X_s Y_s ds.$$

   Izračunajte $\operatorname{cov}(X_t, Y_t)$.

20 Naloga

Naj bo B standardno Brownovo gibanje in naj bo $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ filtracija, ki jo generira. Naj bo

$$A_t = \int_0^t B_s^2 ds.$$

1. Za $0 \leq t < T$ izračunajte

$$E(A_T | \mathcal{F}_t).$$

2. Poiščite prilagojen proces H, da bo veljalo
$$E\left[\int_0^T H_s^2 ds\right] < \infty$$
in
$$A_T = E(A_T) + \int_0^T H_s dB_s.$$

21 Naloga

Naj bo B standardno Brownovo gibanje. Zvezen prilagojen proces X naj ustreza enačbi $X_0 = 1$ in
$$dX_t = r dt + \alpha X_t dB_t.$$
Označite
$$Z_t = e^{-\alpha B_t + \frac{1}{2}\alpha^2 t}.$$

1. Naj bo
$$Y_t = Z_t X_t.$$
Izračunajte dY_t.

2. Poiščite X.

22 Naloga

Prilagojena zvezna procesa X in Y naj ustrezata enačbama
$$\begin{aligned} dX_t &= X_t dB_t^{(1)} + X_t dB_t^{(2)} \\ dY_t &= -Y_t dt + Y_t dB_t^{(1)}, \end{aligned}$$
kjer sta $B^{(1)}$ in $B^{(2)}$ neodvisni Brownovi gibanji. Predpostavite še začetna pogoja $X_0 = Y_0 = 1$.

1. Izračunajte $d(X_t Y_t)$.
2. Izračunajte $X_t Y_t$.
3. Izračunajte $\mathrm{cov}(X_t, Y_t)$. Lahko privzamete da sta $\int_0^t X_s dB_s^{(1)}$ ter $\int_0^t X_s dB_s^{(2)}$ martingala.

23 Naloga

Naj bo B standardno Brownovo gibanje, $\{a, T\} \subset (0, \infty)$. Označite $\bar{B}_t = \max_{0 \le s \le t} B_s$.

1. Pokažite da je za $0 \leq t < T$

$$E\left(1\left(\bar{B}_T \geq a\right)|\mathcal{F}_t\right) = 1(\bar{B}_t \geq a) + 1(\bar{B}_t < a) \cdot 2\left(1 - \Phi\left(\frac{a - B_t}{\sqrt{T-t}}\right)\right),$$

kjer je $\Phi(z)$ porazdelitvena funkcija standardizirano normalne porazdelitve.

2. Najdite prilagojen z desne zvezen proces $(H_t)_{t\in[0,T]}$ z $E\left(\int_0^T H_s^2 ds\right) < \infty$, za katerega je s.g.

$$1\left(\bar{B}_T \geq a\right) = P\left(\bar{B}_T \geq a\right) + \int_0^T H_s ds.$$

Namig: Definirajmo $T_a := \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}$. *Po prvi točki je, za* $0 \leq t < T \wedge T_a$, $E\left(1\left(\bar{B}_T \geq a\right)|\mathcal{F}_t\right)$ *oblike* $F(B_t, t)$ *za funkcijo* $F(x,t) = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{a-x}{\sqrt{T-t}}\right)\right)$, $(x,t) \in (-\infty, a) \times (-\infty, T)$. *Uporabite lahko Itôvo formulo za* $t < T_a \wedge T$, *; po času* $T_a \wedge T$ *pa postavite* H *na* 0.

24 Naloga

Zvezna prilagojena procesa X in Y naj ustrezata enačbama

$$\begin{aligned} dX_t &= X_t dt + Y_t dt + dW_t^{(1)} \\ dY_t &= Y_t dt + dW_t^{(2)} \end{aligned}$$

kjer sta $W^{(1)}$ in $W^{(2)}$ neodvisni Brownovi gibanji.

1. Izračunajte
$$d\left(e^{-t}X_t - te^{-t}Y_t\right) \quad \text{in} \quad d\left(e^{-t}Y_t\right).$$

2. Poiščite X in Y pri pogoju $X_0 = Y_0 = 0$.

3. Za martingala

$$M_t = \int_0^t e^{-s} dW_s^{(1)} - \int_0^t s e^{-s} dW_s^{(2)} \quad \text{in} \quad N_t = \int_0^t e^{-s} dW_s^{(2)}$$

izračunajte $\langle M, N\rangle_t$. Na podlagi tega izračunajte $\mathrm{cov}(X_t, Y_t)$.

Namig: $M_t N_t - \langle M, N\rangle_t$ *je v tem primeru martingal (tega vam ni potrebno dokazati). Spomnimo še, da je* $\langle W^{(1)}, W^{(2)}\rangle = 0$.

25 Naloga

Naj bo B standardno Brownovo gibanje in definirajte

$$X_t = \int_0^t 1(B_s > 0)\, dB_s .$$

Definirajte

$$A_t = \int_0^t 1(B_s > 0)\, ds .$$

1. Pokažite, da sta procesa

$$M_t = e^{\frac{\lambda^2}{2}A_t}\cos(\lambda X_t) \quad \text{in} \quad N_t = e^{\frac{\lambda^2}{2}A_t}\sin(\lambda X_t)$$

   lokalna martingala.

2. Naj bo $T = \inf\{t \geq 0 \colon A_t \geq 1\}$. Izračunajte $E(M_T)$ in $E(N_T)$. Kakšna je porazdelitev slučajne spremenljivke X_T? Kot znano lahko privzamete, da je $P(T < \infty) = 1$.

26 Naloga

Dan naj bo sistem stohastičnih diferencialnih enačb

$$\begin{aligned} dX_t &= X_t dt + Y_t dt + dB_t^{(1)} \\ dY_t &= -X_t dt + 3Y_t dt + dB_t^{(2)}, \end{aligned}$$

kjer sta $B^{(1)}$ in $B^{(2)}$ neodvisni Brownovi gibanji. Začetna pogoja sta $X_0 = Y_0 = 0$.

1. Izračunajte

$$d\left(e^{-2t}(1+t)X_t - te^{-2t}Y_t\right) \qquad \text{in} \qquad d\left(te^{-2t}X_t + e^{-2t}(-t+1)Y_t\right).$$

2. Označite

$$M_t = \int_0^t e^{-2s}(1+s)dB_s^{(1)} - \int_0^t se^{-2s}dB_s^{(2)}$$

   in

$$N_t = \int_0^t se^{-2s}dB_s^{(1)} + \int_0^t e^{-2s}(-s+1)dB_s^{(2)}.$$

   Izrazite X_t in Y_t eksplicitno s pomočjo M_t in N_t.

3. Izračunajte $\langle M, N\rangle_t$ in $\mathrm{cov}(M_t, N_t)$.

4. Utemeljite, da je

$$\mathrm{var}(M_t) = \langle M\rangle_t = \int_0^t e^{-4s}(1 + 2s + 2s^2)ds$$

   in

$$\mathrm{var}(N_t) = \langle N\rangle_t = \int_0^t e^{-4s}(1 - 2s + 2s^2)ds.$$

   Izrazite $\mathrm{cov}(X_t, Y_t)$ z $\langle M\rangle_t$, $\langle N\rangle_t$ in $\langle M, N\rangle_t$.

27 Naloga

Naj bo B standardno Brownovo gibanje in $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ njegova naravna filtracija.

1. Naj bo $0 \leq t < T$. Pokažite, da je

$$E\left(B_T^+ | \mathcal{F}_t\right) = \frac{\sqrt{T-t}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{B_t^2}{2(T-t)}} + B_t \Phi\left(\frac{B_t}{\sqrt{T-t}}\right).$$

   kjer je $x^+ = \max(x, 0)$ in je $\Phi(z)$ porazdelitvena funkcija standardizirano normalne porazdelitve.

2. Najdite integrand H_s, da bo za $0 \leq t < T$ veljalo

$$E\left(B_T^+ | \mathcal{F}_t\right) = E\left(B_T^+\right) + \int_0^t H_s dB_s.$$

   Lahko H_t razširite, tako da bo integralska reprezentacija veljala tudi za $T = t$?

28 Naloga

Zvezen prilagojen proces X naj ustreza enačbi

$$dX_t = dB_t + X_t dt.$$

Pri danem začetnem pogoju $X_0 = x_0$ ima enačba enolično rešitev.

1. Naj bo $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ odvedljiva funkcija, za katero velja

$$F'(x) = e^{-x^2}.$$

   Pokažite, da je $Y_t = F(X_t)$ martingal.

2. Naj bo $x_0 > 0$ in $T_0 = \inf\{t \geq 0 \colon X_t = 0\}$. Izrazite $P(T_0 = \infty)$ s funkcijo $F(x) = \int_0^x e^{-s^2} ds$.

   Namig: pomislite najprej na $T_{0,a} = \inf\{t \geq 0 \colon X_t \in \{0, a\}\}$ za $a > x_0$. Kot znano privzemite, da je $P(T_{0,a} < \infty) = 1$ za vse $a > x_0$ in da velja $\int_0^\infty e^{-s^2} ds = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

3. Izračunajte $E(X_t)$ and $\mathrm{var}(X_t)$.

   Namig: oglejte si $e^{-t} X_t$.

29 Naloga

Zvezen prilagojen proces X naj ustreza enačbi

$$dX_t = \left(\frac{2X_t}{1+t} - (1+t)^2\right) dt + (1+t^2) dW_t,$$

kjer je W standardno Brownovo gibanje. Začetni pogoj je $X_0 = x_0 \in \mathbb{R}$.

1. Naj bo $X_t = (1+t)^2 Y_t$. Ugotovite, kakšni stohastični diferencialni enačbi ustreza proces Y.
2. Najdite rešitev X originalne stohastične diferencialne enačbe in navedite $E(X_t)$ ter $\mathrm{var}(X_t)$.

30 Naloga

Zvezna prilagojena procesa X in Y ustrezata enačbama

$$X_t = x + \int_0^t \sqrt{X_s}\, dB_s + \alpha t \quad \text{in} \quad Y_t = y + \int_0^t \sqrt{Y_s}\, dD_s + \beta t\,,$$

kjer sta B in D neodvisni Brownovi gibanji. Prevzemite, da imata enačbi enolični krepki rešitvi. Privzemite naprej, da je $\alpha, \beta \in [0, \infty)$ in $x, y \geq 0$. V tem primeru je $P(X_t \geq 0) = P(Y_t \geq 0) = 1$ za vse $t \geq 0$. Predpostavite končno, da obstaja še tretje Brownovo gibanje E neodvisno od B in D. Označite

$$W_t = \int_0^t 1(X_s + Y_s > 0) \frac{\sqrt{X_s}\, dB_s + \sqrt{Y_s}\, dD_s}{\sqrt{X_s + Y_s}} + \int_0^t 1(X_s + Y_s = 0)\, dE_s\,.$$

1. Pokažite, da je
$$X_t + Y + t = x + y + \int_0^t \sqrt{X_s + Y_s}\, dW_t + (\alpha + \beta) dt\,.$$
2. Utemeljite, da je W Brownovo gibanje.
3. Označite za fiksen $t > 0$ in $\lambda \geq 0$
$$\phi(x, \alpha) = E\left(e^{-\lambda X_t}\right).$$
Utemeljite, da je
$$\phi(x+y, \alpha+\beta) = \phi(x, \alpha)\phi(y, \beta)\,.$$
Namig: ker sta X in Y krepki rešitvi in sta B in D neodvisna, sta neodvisna tudi X in Y.
4. Kot znano privzemite
$$\phi(x, 1) = (1 + 2\lambda t)^{-1/2} \exp\left(-\frac{\lambda x}{1 + 2\lambda t}\right).$$
Izrazite $\phi(x, \alpha)$.

Namig: upoštevajte
$$\phi(x, \alpha) = \phi(x, 0)\phi(0, \alpha)$$
in to, da za vsako merljivo funkcijo $f : [0, \infty) \to (0, \infty)$ z lastnostjo $f(a+b) = f(a)f(b)$ velja $f(x) = e^{cx}$ za neko konstanto $c \in \mathbb{R}$. Merljivosti ti ni potrebno utemeljevati.

31 Naloga

Naj bosta B in D neodvisni standardni Brownovi gibanji. Definirajte proces X s predpisom

$$X_t = (B_t + 1)^2 + D_t^2 .$$

Definirajte čas ustavljanja

$$T = \inf\{t \geq 0 \colon X_t \in \{a, b\}\}$$

za števili $0 < a < 1 < b$.

1. Izračunajte dX_t in $d\langle X\rangle_t$.
2. Definirajte proces
$$Y_t = \frac{1}{2}\log(X_t) .$$
Utemeljite, da je $Y_t^T = Y_{t\wedge T}$ martingal.
3. Privzemite, da je $P(T < \infty) = 1$. Pokažite, da je
$$P(X_T = a) = \frac{\log b}{\log b - \log a} .$$

32 Naloga

Naj bosta B in D neodvisni Brownovi gibanji. Naj bo $\alpha \in \mathbb{R}$ dana konstanta. Definirajte

$$M_t = \alpha\left(\int_0^t B_s dD_s + \int_0^t D_s dB_s\right) \quad \text{in} \quad N_t = \frac{\alpha^2}{2}\int_0^t \left(B_s^2 + D_s^2\right) ds .$$

Naj bo

$$X_t = \cos(M_t) e^{N_t} .$$

1. Izračunajte $\langle M\rangle$.
2. Pokažite, da je X lokalni martingal.

33 Naloga

Naj bo B standardno Brownovo gibanje in

$$T_a = \inf\{t \geq 0 \colon B_t = a\} .$$

Naj bo $X = 1(T_1 \leq 1)$. Najti želimo tak prilagojen integrand H, da bo

$$X = E(X) + \int_0^1 H_s dB_s .$$

Kot znano privzemite, da za $a > 0$ velja

$$P(T_a \leq t) = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right)\right).$$

Označite proces tekočega maksimuma z

$$\bar{B}_t = \max_{0 \leq s \leq t} B_s .$$

1. Izračunajte
$$E(X|\mathcal{F}_t)$$
za $t < 1$, kjer je $\mathcal{F}_t$ naravna filtracija Brownovega gibanja.

2. Naj bo
$$Y_t = E(X|\mathcal{F}_t)$$
zvezna verzija pogojnih pričakovanih vrednosti. Utemeljite, da velja
$$Y_{t\wedge T_1} = 2\int_0^{t\wedge T_1} 1(\bar{B}_s < 1)\frac{1}{\sqrt{1-s}}\phi\left(\frac{1-B_s}{\sqrt{1-s}}\right)dB_s , \quad t < 1 ,$$
kjer je ϕ gostota N(0, 1) porazdelitve.

3. Poiščite integrand H.

34 Naloga

Stohastična diferencialna enačba za zvezen prilagojen proces X,

$$dX_t = \sqrt{1 + X_t^2}\, dB_t + \left(\sqrt{1 + X_t^2} + \frac{1}{2}X_t\right)dt,$$

ima pri začetnem pogoju $X_0 = x_0$ enolično določeno krepko rešitev. Pri tem je B standardno Brownovo gibanje.

1. Definirajte procesa
$$Y_t = e^{-t/2}X_t \qquad \text{in} \qquad Z_t = e^{-t/2}\sqrt{1 + X_t^2} .$$
Pokažite, da je
$$dY_t = Z_t dB_t + Z_t dt \qquad \text{in} \qquad dZ_t = Y_t dB_t + Y_t dt .$$

2. Označite $a(t) = E(Y_t)$ in $b(t) = E(Z_t)$. Utemeljite, da je
$$a(t) = x_0 + \int_0^t b(s)ds \qquad \text{in} \qquad b(t) = \sqrt{1 + x_0^2} + \int_0^t a(s)ds .$$
Predpostavite lahko da je, kot funkcija s, $E(X_s^2)$ omejena na končnih intervalih.

3. Utemeljite, da velja
$$\dot{a} = b \qquad \text{in} \qquad \dot{b} = a\,.$$
Izračunajte $E(X_t)$.

   Namig: diferencialni enačbi boste najlaže rešili, če ju najprej seštejete, potem pa odštejete.

4. Utemeljite, da je proces
$$X_t = \sinh\left(\log\left(x_0 + \sqrt{1 + x_0^2}\right) + B_t^{(1)}\right)$$
kjer je
$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
in je $B_t^{(1)} = B_t + t$ Brownovo gibanje s tendenco $\mu = 1$, rešitev enačbe.

35 Naloga

Naj bo B standardno Brownovo gibanje. Semimartingal Z naj ustreza enačbi
$$dZ_t = F(t)Z_t dt + G(t)dM_t\,,$$
kjer sta $F(t)$ in $G(t)$ zvezno odvedljivi funkciji in je
$$M_t = \exp\left(B_t - \frac{1}{2}t\right).$$
Začetni pogoj naj bo $Z_0 = z_0$.

1. Naj bo
$$Y_t = \exp\left(-\int_0^t F(u)du\right) Z_t\,.$$
Izračunajte dY_t in zapišite Z eksplicitno.

2. Izračunajte $\text{var}(Z_t)$.

36 Naloga

Naj bo B standardno Brownovo gibanje in naj bo $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ filtracija, ki jo generira. Naj bo
$$A_t = \int_0^t B_s^2 ds\,.$$

1. Za $0 \leq t < T$ izračunajte
$$E\left(A_T | \mathcal{F}_t\right).$$

2. Poiščite prilagojen proces H, da bo veljalo

$$E\left[\int_0^T H_s^2 ds\right] < \infty$$

in

$$A_T = E(A_T) + \int_0^T H_s dB_s.$$

37 Naloga

Zvezni semimartingal X naj zadošča stohastični diferencialni enačbi

$$\begin{aligned} dX_t &= -X_t dt + \sqrt{X_t(1-X_t)} dW_t \\ X_0 &= x \in (0,1) \end{aligned}$$

Privzemite, da krepka rešitev enačbe obstaja in da velja $X_t \in [0,1]$ s.g. za vse $t \geq 0$. Naj bosta a in b takšni števili, da je $0 < a < x < b < 1$. Definirajmo čas ustavljanja

$$T = T_a \wedge T_b$$

Kot znano privzemite, da je $T < \infty$ s.g.

1. Preveri, da za $g(x) = \frac{1}{1-x}$ velja, da je $g(X_{t\wedge T})$ lokalni martingal.
2. S pomočjo funkcije g iz prejšnje točke izračunajte $P(T_a < T_b)$.
3. Naj bo
$$h(x) = \frac{1 - x\log x}{1-x}$$
Zapišite semimartingalsko dekompozicijo za proces $h(X_{t\wedge T})$.
4. Izračunaj $E(T)$. Rezultat lahko izrazite s funkcijama g in h.

38 Naloga

Kot znano privzemite, da je za $\lambda \in \mathbb{R}$

$$E\left(e^{\lambda(B_t - B_s)}\right) = e^{\frac{\lambda^2(t-s)}{2}}$$

za $s < t$.

1. Naj bo $X_t = \int_0^t H_s dB_s$ za ustrezen integrand. Poiščite integrand K, da bo za fiksen T
$$e^{X_T - \frac{1}{2}\langle X\rangle_T} = 1 + \int_0^T K_s dB_s.$$

2. Naj bo T fiksen naj bo $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ particija intervala $[0,T]$. Naj bodo $\lambda_j \in \mathbb{R}$ za $j = 0,1,\ldots,n-1$. Naj bo

$$Y = \exp\left(\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j \left(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}\right)\right).$$

Najdite integrand K, da bo

$$Y = E(Y) + \int_0^T K_s dB_s .$$

39 Naloga

Naj bodo $H_n(x,t)$ polinomi v spremenljivkah x in t, pri čemer je $H_n(x,t)$ stopnje n v spremenljivki x. Predpostavite, da je $H_0(x,t) = 1$, $H_n(0,0) = 0$ za $n \geq 1$ ter

$$\frac{\partial H_n}{\partial x}(x,t) = nH_{n-1}(x,t)$$

in

$$\frac{\partial H_n}{\partial t}(x,t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 H_n}{\partial x^2}(x,t) = 0$$

za $n \geq 1$. Definirajte

$$M_t^n = H_n(B_t, t)$$

za $n = 0,1,\ldots$, kjer je B standardno Brownovo gibanje.

1. Pokažite, da je za vsak $n \geq 0$ proces M^n kvadratno integrabilen martingal.
2. Izračunajte $E\left[(M_t^n)^2\right]$.

   Namig: uporabite indukcijo.

40 Naloga

Za zvezen semimartingal X naj velja

$$dX_t = X_t(1 - X_t)dW_t ,$$

kjer je W standardno Brownovo gibanje in $X_0 = x_0 \in (0,1)$. Kot znano privzemite, da je $P(X_t \in (0,1)) = 1$ za vse $t \geq 0$. Definirajte

$$Y_t = \log\left(\frac{X_t}{1 - X_t}\right)$$

in

$$y_0 = \log\left(\frac{x_0}{1 - x_0}\right).$$

1. Pokažite, da je
$$Y_t = y_0 + W_t + \frac{1}{2}\int_0^t \tanh\left(\frac{Y_s}{2}\right) ds.$$
Utemeljite, da ima ta stohastična diferencialna enačba enolično določeno krepko rešitev. Pri tem je
$$\tanh y = \frac{\sinh y}{\cosh y} = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}.$$
2. Izračunajte $E(Y_t)$.
3. Izračunajte $\operatorname{cov}(X_t, Y_t)$.

41 Naloga

Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zvezna in omejena. Definirajte
$$X_T = \int_0^T f(B_s) ds.$$
Za slučajno spremenljivko X_T je $E(X_T^2) < \infty$.

1. Za $0 \le t < T$ definirajte funkcijo
$$\psi(x,t) = \int_0^t E\left(f(x + B_s)\right) ds.$$
Izrazite $E(X_T|\mathcal{F}_t)$ s funkcijo $\psi(x,t)$.
2. Privzemite, da je funkcija $\psi(x,t)$ dovolj gladka, da lahko uporabimo Itôvo formulo. Z njo izrazite integrand H, za katerega je
$$X_T = E(X) + \int_0^T H_s dB_s.$$
3. Naj bo $f(x) = \sin x$. Najdite integrand H, da bo
$$\int_0^T \sin(B_s) ds = \int_0^T H_s dB_s.$$
Kot znano privzemite $E(\cos(B_t)) = e^{-\frac{t}{2}}$.

Poglavje 3

Vrednotenje opcij

42 Naloga

Naj bosta $B^{(1)}$ in $B^{(2)}$ standardni Brownovi gibanji glede na filtracijo $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Predpostavite, da je $\langle B^{(1)}, B^{(2)}\rangle_t = \rho t$ za nek $\rho \in (-1,1)$. Naj bo

$$S_t^{(1)} = S_0^{(1)} \exp\left(\mu_1 t + \sigma_1 B_t^{(1)} - \frac{\sigma_1^2}{2} t\right) \quad \text{in} \quad S_t^{(2)} = S_0^{(2)} \exp\left(\mu_2 t + \sigma_2 B_t^{(2)} - \frac{\sigma_2^2}{2} t\right)$$

za $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, $\sigma_1, \sigma_2 > 0$, ter $S_0^{(1)}, S_0^{(2)} > 0$. Vrednost opcije v trenutku T je definirana kot

$$V_T = \left(\frac{S_T^{(1)}}{S_T^{(2)}} - 1\right)_+ .$$

Privzemite, da je obrestna mera na bančni račun konstantna in enaka $r \in [0, \infty)$.

1. Pokažite, da je proces

$$Y_t = \exp\left(\sigma_1 B_t^{(1)} - \sigma_2 B_t^{(2)} - \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2)t\right)$$

   lokalni martingal.

2. Označite za $0 \leq t \leq T$

$$R_t = \frac{S_t^{(1)}}{S_t^{(2)}}$$

   Kako bi vpeljali novo mero Q, da bi bil proces $e^{-rt}R_t$ pod Q martingal?

   Namig: Proces

$$B_t = \frac{1}{\sqrt{\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}}\left(\sigma_1 B_t^{(1)} - \sigma_2 B_t^{(2)}\right)$$

je Brownovo gibanje.

3. Privzemite, da je možno zgoraj opisano opcijo replicirati. Zapišite njeno ceno V_0 v trenutku $t = 0$.

4. Privzetek pri vrednotenju je, da lahko v vsakem trenutku kupimo poljubno količino temelja R_t, na katerega se nanaša izvedeni vrednostni papir. Pokažite, da je

$$\tilde{V}_T = V_0 + \int_0^T H_s \left(\sigma_1 dB_s^{(1)} - \sigma_2 dB_s^{(2)}\right) + \int_0^T G_s ds$$

za ustrezna integranda H in G (kjer je $\tilde{V}_t = e^{-rt} E_Q\left(e^{-r(T-t)} V_T | \mathcal{F}_t\right)$). Komentirajte zakaj to pomeni, da lahko opcijo repliciramo s trgovanjem z obema temeljema, ter bančnim računom.

43 Naloga

Naj bo S cena delnice v Black-Scholesovem modelu, z obrestno mero $r \in (0, \infty)$, in volatilnostjo $\sigma \in (0, \infty)$. Fiksirajmo zapadlost $T \in [0, \infty)$ in označimo z Q martingalsko mero za interval $[0, T]$, tako da je na $[0, T]$, $dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t$ za Q-Brownovo gibanje W.

1. Naj bodo dane konstante $0 < a \leq b \leq \infty$, ter $s \in [0, \infty)$. Skicirajte graf funkcije $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ dane s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{za } 0 \leq x \leq a \\ s(x-a) & \text{za } a < x \leq b \\ s(b-a) & \text{za } x > b \end{cases} .$$

2. Zapišite $f(S_T)$ kot ustrezno linearno kombinacijo dveh izplačil evropskih nakupnih opcij. Določite za $0 \leq t \leq T$

$$V_t := E_Q\left[e^{-r(T-t)} f(S_T) | \mathcal{F}_t\right].$$

3. Za $0 \leq t < T$ navedite komponento H_t varovalnega portfelja za opcijo, ki izplača $f(S_T)$ v času T.

4. Naj bo $f(x) = s(x-K)^+$, $x \in [0, \infty)$ za konstanti $s \in [0, \infty)$, $K \in (0, \infty)$. Razložite, zakaj je za $0 \leq t < T$

$$E_Q[e^{-r(T-t)} f(S_T) | \mathcal{F}_t] = \int_{(0,\infty)} v_h(t, S_t) df'_+(h),$$

kjer je f'_+ desni odvod funkcije f, df'_+ pripadajoča mera v Lebesgue-Stieltjesovem smislu in $v_h(t, x) = x\Phi(d_1) - he^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$,

$$d_1 = \frac{\log(x/h) + r(T-t) + \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

in

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

44 Naloga

Predpostavite za gibanje cene delnice Black-Scholesov model, torej

$$S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t}.$$

Predpostavite še, da na časovnem intervalu $[0,T]$ obrestna mera ni konstantna, temveč je znana omejena funkcija $r(t)$, tako da je diskontirani proces cene enak

$$\tilde{S}_t = S_0 e^{-\int_0^t r(s)ds + \mu t + \sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t}$$

1. Kako bi zamenjali mero, da bi bil $\tilde{S}$ martingal za $0 \le t \le T$?

   Namig: Pod katero novo mero je proces

   $$W_t = B_t - \int_0^t \frac{r(s)-\mu}{\sigma} ds$$

   Brownovo gibanje?

2. Ovrednotite evropsko nakupno opcijo z izvršno ceno k in zapadlostjo T, v trenutku $t=0$. *Namig: V_0 je pričakovana diskontirana vrednost V_T pod novo mero. Ne računajte integralov , temveč si pomagajte z znanimi formulami za evropske nakupne opcije pri konstantni obrestni meri.*

3. Ovrednotite evropsko nakupno opcijo z izvršno ceno k in zapadlostjo T, v trenutku t.

4. Zapišite komponento H_t varovalnega portfelja.

45 Naloga

Predpostavite Black-Scholesov model za gibanje cene delnice v katerem je obrestna mera $r=0$. Fiksirajmo zapadlost $T \in (0,\infty)$ in nivo $a \in (0,\infty)$. Digitalna opcija ima izplačilno funkcijo

$$V_T = 1\left(\max_{0\le t\le T} S_t \ge a\right),$$

torej izplačilo je 1, če cena opcije v časovnem intervalu $[0,T]$ preseže prag a, 0 sicer.

1. Definirajte $\bar{S}_t = \max_{0\le s\le t} S_s$ za $t \ge 0$. Za $0 \le t$ in $0 \le x$ definirajte
$$Q\left(\bar{S}_t/S_0 \ge x\right) = F(x,t),$$
kjer je Q običajna nova mera. Utemeljite, da je za $0 \le t \le T$
$$E_Q\left(1(\bar{S}_T \ge a)|\mathcal{F}_t\right) = 1(\bar{S}_t \ge a) + 1(\bar{S}_t < a)F(a/S_t, T-t).$$

2. Naj bo $T_a = \inf\{t \ge 0\colon S_t = a\}$. Utemeljite, da za $T_a \le T$ velja
$$V_{T_a} = 1.$$

3. Privzemite da je $F(x,t)$ razreda C^2 v x in razreda C^1 v t za $t > 0$, $x > 0$. Pokažite, da je na $\{t < T_a \wedge T\}$ varovalna komponenta H za vrednostni proces V naše digitalne opcije enaka
$$H_t = -\frac{\partial F}{\partial x}(a/S_t, T-t)\cdot\frac{a}{S_t^2}.$$

46 Naloga

Naj bo S cena delnice v Black-Scholesovem modelu, z obrestno mero $r \in [0,\infty)$, in volatilnostjo $\sigma \in (0,\infty)$. Fiksirajmo zapadlost $T \in [0,\infty)$ in označimo z Q martingalsko mero za interval $[0,T]$, tako da je na $[0,T]$, $dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t$ za Q-Brownovo gibanje W.

1. Naj bodo dane konstante $0 < a \le b \le \infty$, ter $s \in [0,\infty)$. Skicirajte graf funkcije $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ dane s predpisom
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{za } 0 \le x \le a \\ s(x-a) & \text{za } a < x \le b \\ s(b-a) & \text{za } x > b \end{cases}.$$

2. Zapišite $f(S_T)$ kot ustrezno linearno kombinacijo dveh izplačil evropskih nakupnih opcij. Določite za $0 \le t \le T$
$$V_t := E_Q\left[e^{-r(T-t)}f(S_T)|\mathcal{F}_t\right].$$

3. Za $0 \le t < T$ navedite komponento H_t varovalnega portfelja za opcijo, ki izplača $f(S_T)$ v času T.

4. Naj bo $f(x) = s(x-K)^+$, $x \in [0,\infty)$, za konstanti $s \in [0,\infty)$, $K \in (0,\infty)$. Razložite, zakaj je za $0 \le t < T$
$$E_Q[e^{-r(T-t)}f(S_T)|\mathcal{F}_t] = \int_{(0,\infty)} v_h(t,S_t)\,df'_+(h),$$

kjer je f_+' desni odvod funkcije f, df_+' pripadajoča mera v Lebesgue-Stieltjesovem smislu in $v_h(t,x) = x\Phi(d_1) - he^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$,

$$d_1 = \frac{\log(x/h) + r(T-t) + \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

in

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

47 Naloga

Naj bo S cena delnice v Black-Scholesovem modelu z obrestno mero $r \in (0,\infty)$ in volatilnostjo $\sigma \in (0,\infty)$. Fiksirajmo zapadlost $T \in (0,\infty)$ in označimo s Q martingalsko mero za interval $[0,T]$, tako da je na $[0,T]$, $dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t$ za Q-Brownovo gibanje W.

Naj bodo dane konstante $0 < b \leq a < \infty$. Izveden finančni instrument ima izplačilo $V_T = f(S_T)$ ob času T, kjer je za $x \in (0,\infty)$,

$$f(x) = \begin{cases} x - a, & \text{če je } x > a \\ b - x, & \text{če je } x < b \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}.$$

1. Skicirajte funkcijo $f(x)$. Zapišite $f(S_T)$ kot ustrezno linearno kombinacijo izplačil dveh evropskih nakupnih opcij ter terminske pogodbe (vseh z zapadlostmi T in ustreznimi izvršilnimi cenami).

   Pojasnilo: terminske pogodbe so matematično oblike $S_T - k$ za neko izvršilno ceno k.

2. Določite za $0 \leq t \leq T$

$$V_t := E_Q\left[e^{-r(T-t)} f(S_T) | \mathcal{F}_t\right].$$

3. Za $0 \leq t < T$ navedite komponento H_t varovalnega portfelja za opcijo, ki izplača $f(S_T)$ v času T.

   Namig: pomislite, kako moramo varovati terminsko pogodbo.

48 Naloga

Naj bo $\{r_1, r_2\} \subset \mathbb{R}$ in $\{s_0, k, T, T_1, \sigma\} \subset (0,\infty)$, $T_1 < T$. Kot model za gibanje cene temelja S izberimo Black-Sholesov model z volatilnostjo σ in začetno ceno $S_0 = s_0$; netvegana obrestna mera r denarnega računa (zvezno obrestovanje) naj zadošča $r_t = r_1$ za $t \in [0, T_1)$ in $r_t = r_2$ za $t \in [T_1, T]$. Neka pogojna terjatev izplača $(S_T - k)_+$ ob času T; naj bo V njen vrednostni proces.

Pomoč/spomnimo: Za vrednostni proces V^c (c kot "$c$lassical") evropske nakupne opcije z zapadlostjo T in izvršilno ceno k velja v klasičnem Black-Scholesovem modelu s konstantno obrestno mero $r \in \mathbb{R}$, volatilnostjo σ,

$$V_t^c = F(S_t, T-t; r, k, \sigma) \text{ s.g. za } t \in [0, T),$$

kjer je

$$F(x, \tau; r, k, \sigma) = x\Phi(d_1) - ke^{-r\tau}\Phi(d_2),$$

pri čemer sta d_1 in d_2 definirani z

$$d_1 = \frac{\log(x/k) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

in

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}.$$

1. Navedite V_{T_1} v odvisnosti od S_{T_1} s pomočjo funkcije $F(x, \tau; r, k, \sigma)$.
2. Navedite komponenti varovalnega portfelja za čase z intervala $[T_1, T]$.
3. Utemeljite, da je

   $$V_0 = e^{-r_1 T_1} E_Q\left[F\left(s_0 e^{r_1 T_1 + \sigma W_{T_1} - \sigma^2 T_1/2}, T - T_1; r_2, k, \sigma\right)\right],$$

   kjer je, glede na Q, W Brownovo gibanje na intervalu $[0, T_1]$.
4. Utemeljite, da je

   $$V_0 = e^{-r_1 T_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F\left(s_0 e^{r_1 T_1 + \sigma\sqrt{T_1} z - \frac{\sigma^2}{2} T_1}, T - T_1; r_2, k, \sigma\right) e^{-z^2/2} dz.$$

   Integrala vam ni potrebno izračunati.

49 Naloga

Za gibanje temelja predpostavite Black-Scholesov model

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t).$$

Obrestna mera naj bo konstantna in enaka r. Čas dospelosti označimo s T.

1. Recimo, da je vrednost opcije ob dospetju enaka $V_T = S_T$. Kolikšna je vrednost opcije v času $t = 0$? Kakšna je varovalna listnica (H_t^0, H_t)?
2. Za evropsko nakupno opcijo z izvršno ceno k je za $t < T$

   $$V_t = S_t\Phi(d_1) - e^{-r(T-t)}k\Phi(d_2)$$

z

$$d_1 = \frac{\log(S_t/k) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad \text{in} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

in

$$H_t = \Phi(d_1).$$

Iz zveze

$$(k-x)_+ = (x-k)_+ - (x-k)$$

izpeljite ceno V_t in potem še H_t za evropsko prodajno opcijo $V_T = (k - S_T)_+$.

3. Opcija *Metulj* je definirana kot

$$V_T = f(S_T),$$

kjer je za $0 < a < k < b$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{k-a} & a \le x < k \\ \frac{b-x}{b-k} & k < x < b \\ 0 & x > b \end{cases}$$

Izračunajte V_t.

Namig: oglejte si funkciji

$$\lambda\left[(x-k)_+ - (x-b)_+\right] \quad \textit{in} \quad \mu\left[(k-x)_+ - (a-x)_+\right]$$

s primerno izbranima λ in μ.

4. Izrazite H_t za *Metulja*.

50 Naloga

Naj bo $T > 0$ fiksen in za gibanje temelja privzemimo Black-Scholesov model

$$S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2} t}.$$

Obrestna mera r in volatilnost σ naj bosta fiksni in znani. Naj bo f nenegativna zvezna funkcija na $[0, T]$, za katero je $\int_0^T f(s)ds = 1$. Uteženo geometrijsko azijsko opcijo definiramo kot

$$V_T = \left(\exp\left(\int_0^T f(s)\log S_s ds\right) - k\right)_+.$$

Kot znano privzemite, da je za $Z \sim \mathrm{N}(a, b^2)$ in $c > 0$

$$E\left[\left(e^Z - c\right)_+\right] = e^{a + \frac{b^2}{2}}\Phi\left(\frac{a + b^2 - \log c}{b}\right) - c\Phi\left(\frac{-\log c + a}{b}\right),$$

kjer je $\Phi(z)$ porazdelitvena funkcija standardizirano normalne porazdelitve.

1. Naj bo W Brownovo gibanje in $F(t) = \int_0^t f(s)ds$. Prepričajte se, da je
$$X = \int_0^T f(s)W_s ds = \int_0^T (F(T) - F(s))dW_s$$
in pokažite, da je
$$\mathrm{var}(X) = \int_0^T (F(T) - F(s))^2 ds$$
2. Izračunajte V_0.
3. Izračunajte V_t.

51 Naloga

Predpostavite Black-Sholesov model za gibanje cene temelja S:
$$S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t}.$$
Vrednost opcije v času dospetja T naj bo dana z
$$V_T = \left(\sqrt[3]{S_{T/3} \cdot S_{2T/3} \cdot S_T} - K\right)_+ .$$
Privzemite, da je jakost obrestne mere konstantno r in volatilnost konstantno σ. Kot znano privzemite, da je za $Z \sim \mathrm{N}(a, b^2)$ in $c > 0$
$$E\left[\left(e^Z - c\right)_+\right] = e^{a+\frac{b^2}{2}}\Phi\left(\frac{a + b^2 - \log c}{b}\right) - c\Phi\left(\frac{-\log c + a}{b}\right),$$
kjer je $\Phi(z)$ porazdelitvena funkcija standardizirano normalne porazdelitve.

1. Izračunajte V_0.
2. Navedite $V_{2T/3}$ v odvisnosti od $S_{T?3}$ in $S_{2T/3}$.

52 Naloga

Za gibanje temelja predpostavite Black-Scholesov model, v katerem sta volatilnost σ in obrestna mera r konstantni. Predpostavljamo torej, da je
$$S_t = S_0 \exp\left(\mu t + \sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t\right).$$
Izplačilo opcije v času dospetja T naj bo
$$V_T = \begin{cases} S_T - a, & \text{če je } S_T > a \\ b - S_T, & \text{če je } S_T < b \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}.$$

1. Izračunajte začetno ceno V_0 opcije.
2. Navedite komponento H_t varovalne listnice.

Poglavje 4

Rešitve nalog

Rešitev naloge 1, page 5

1. Proces M je produkt dveh semimartingalov, od katerih ima prvi omejeno totalno variacijo. Računamo po pravilu za stohastično odvajanje produkta in po Itôvi formuli, pri čemer upoštevamo

   $$d\left(e^{2\lambda^2\int_0^t B_s^2 ds}\right) = e^{2\lambda^2\int_0^t B_s^2 ds}\left(2\lambda^2 B_t^2\right)dt$$

   in

   $$d\left(B_t^2 - t\right) = 2B_t dB_t$$

   ter posledično

   $$d\langle B_t^2 - t\rangle_t = 4B_t^2 dt\,.$$

   Sledi

   $$\begin{aligned} dM_t &= \\ &= e^{2\lambda^2\int_0^t B_s^2 ds}\left(2\lambda^2 B_t^2\right)\cos\left(\lambda\left(B_t^2 - t\right)\right)dt \\ &\quad + e^{2\lambda^2\int_0^t B_s^2 ds}\left[-\lambda\sin\left(\lambda\left(B_t^2 - t\right)\right)2B_t dB_t - \frac{1}{2}\lambda^2\cos\left(\lambda\left(B_t^2 - t\right)\right)4B_t^2 dt\right] \\ &= -2\lambda e^{2\lambda^2\int_0^t B_s^2 ds}\sin\left(\lambda\left(B_t^2 - t\right)\right)B_t dB_t\,. \end{aligned}$$

   Sledi, da je M lokalni martingal. Račun za N je skoraj enak.

2. Če poznamo trajektorijo B na intervalu $[0,t]$, lahko tudi ugotovimo ali je $4\int_0^t B_s^2 ds > a$, torej je T_a čas ustavljanja. Vemo, da sta $\tilde{M}$ in $\tilde{N}$ lokalna martingala. Ker je

   $$e^{2\lambda^2\int_0^{t\wedge T_a} B_s^2 ds} \le e^{\frac{1}{2}\lambda^2 a}\,,$$

   sta tudi omejena, zato sta martingala.

3. Ker sta $\tilde{M}$ in $\tilde{N}$ martingala, za vsak $t > 0$ velja
$$E\left(M_{t\wedge T_a}\right) = 1 \quad \text{in} \quad E\left(N_{t\wedge T_a}\right) = 0\,.$$
Ko $t \to \infty$, zaradi privzetka o končnosti T_a velja $M_{t\wedge T_a} \to M_{T_a}$. Zaradi omejenosti lahko uporabimo izrek o dominirani konvergenci, tako da
$$E\left(M_{t\wedge T_a}\right) \to E\left(M_{T_a}\right),$$
ko $t \to \infty$. Trditev za M sledi. Dokaz za N je enak.

4. Iz prejšnjih točk sklepamo, da je
$$E\left[\cos\left(\lambda\left(B_{T_a} - T_a\right)\right)\right] = e^{-\frac{\lambda^2}{2}a}$$
in
$$E\left[\sin\left(\lambda\left(B_{T_a} - T_a\right)\right)\right] = 0\,.$$
Edina porazdelitev, ki ustreza tem enačbam za vse $\lambda \in \mathbb{R}$, je $\mathrm{N}(0,a)$.

Rešitev naloge 2, page 6

1. Ker sta B in D neodvisni Brownovi gibanji, je $\langle B, D\rangle = 0$. Proces
$$A_t = \int_0^t (B_s^2 + D_s^2)ds$$
ima končno totalno variacijo, zato je $\langle A, B\rangle = \langle A, D\rangle = 0$. Poleg tega je
$$dA_t = (B_t^2 + D_t^2)dt\,.$$
Računamo
$$\begin{aligned} dM_t &= \frac{\lambda^2}{2}e^{\frac{\lambda^2}{2}A_t}(B_t^2 + D_t^2)\cos(\lambda B_t D_t)dt \\ &\quad + e^{\frac{\lambda^2}{2}A_t}\Big(-\lambda D_t\sin(\lambda B_t D_t)dB_t - \lambda B_t \sin(\lambda B_t D_t)dD_t \\ &\qquad -\frac{\lambda^2}{2}D_t^2\cos(\lambda B_t D_t)dt - \frac{\lambda^2}{2}B_t^2\cos(\lambda B_t D_t)dt\Big) \\ &= -\lambda e^{\frac{\lambda^2}{2}A_t}\left(-\lambda D_t\sin(\lambda B_t D_t)dB_t - \lambda B_t\sin(\lambda B_t D_t)dD_t\right). \end{aligned}$$
Za N računamo podobno.

2. Ustavljena lokalna martingala sta lokalna martingala. Ker sta tudi omejena, sta martingala, $t \wedge T_a$ pa je omejen čas ustavljanja. Po izreku o opcijskem ustavljanju je
$$E\left(M_{t\wedge T_a}\right) = E(M_0) = 1 \qquad \text{in} \qquad E\left(N_{t\wedge T_a}\right) = E(N_0) = 0\,.$$

3. Martingal $M_{t\wedge T_a}$ je omejen in po predpostavki
$$M_{t\wedge T_a} \to M_{T_a}\,,$$
ko $t\to\infty$. Po izreku o dominirani konvergenci je
$$E\left(M_{t\wedge T_a}\right) \to E\left(M_{T_a}\right),$$
ko $t\to\infty$, torej je
$$E\left(M_{T_a}\right) = 1\,.$$
Po drugi strani je
$$M_{T_a} = e^{\frac{\lambda^2}{2}a}\cos\left(\lambda B_{T_a} D_{T_a}\right),$$
torej je
$$E\left(\cos\left(\lambda B_{T_a} D_{T_a}\right)\right) = e^{-\frac{\lambda^2}{2}a}\,.$$
Podobno sklepamo, da je
$$E\left(\sin\left(\lambda B_{T_a} D_{T_a}\right)\right) = 0\,.$$
Ti zadnji enačbi veljata za poljuben λ, kar enolično določa porazdelitev $B_{T_a} D_{T_a}$.

Rešitev naloge 3, page 6

1. Po Itôvi formuli in pravilu za odvajanje produkta je
$$dX_t = 3B_t^2 dt + 3B_t dt - 3B_t dt - 3t dB_t = 3(B_t^2 - t) dB_t\,.$$
Sledi, da je X lokalni martingal in je $d\langle X\rangle_t = 9(B_t^2 - t)^2 dt$.

2. Ker je $\langle \lambda X\rangle_t = 9\lambda^2 \int_0^t (B_s^2 - s)^2 ds$, je za proces $R = \lambda X$
$$\begin{aligned} dM_t &= d(e^{\langle R\rangle_t/2}\cos(R_t)) \\ &= M_t \cdot d\langle R\rangle_t/2 - e^{\langle R\rangle_t/2}\sin(R_t) dR_t - M_t d\langle R\rangle_t/2 \\ &= -N_t dR_t\,. \end{aligned}$$
Ker je R lokalni martingal, je torej tudi M lokalni martingal kot stohastični integral zveznega, prilagojenega procesa. Za N računamo podobno.

3. Ustavljen lokalni martingal je lokalni martingal. Procesa M^T in N^T sta torej omejena lokalna martingala in zato omejena martingala. Po izreku o opcijskem ustavljanju je
$$E[M_0] = E[M_{t\wedge T}] \qquad \text{in} \qquad E[N_0] = E[N_{T\wedge t}]$$
za vsak t. Ko $t\to\infty$, je $M_{T\wedge t} \to M_T$ in podobno za N. Ker je $M_{t\wedge T}$ omejen, sledi trditev z uporabo izreka o dominirani konvergenci. Argument za N je podoben.

4. Iz prejšnje točke sledi

$$\cos(\lambda X_T) = e^{-\lambda^2/2} \quad \text{in} \quad \sin(\lambda X_T) = 0$$

za vse realne λ, zato $X_T \sim N(0,1)$.

Rešitev naloge 4, page 7

1. Izrek o opcijskem ustavljanju za omejene čase ustavljanja nam da

$$0 = E(M_0) = E\left(M_{t\wedge T_{a,b}}\right) = E\left(|B_{t\wedge T_{a,b}}|\right) - E\left(L_{t\wedge T_{a,b}}\right)$$

(linearnost upanja sledi npr. iz omejenosti $|B^{T_{a,b}}|$ ter nenegativnosti $L^{T_{a,b}}$). Ko $t \to \infty$, zaradi $P(T_{a,b} < \infty) = 1$ velja s.g.

$$|B_{t\wedge T_{a,b}}| \to |B_{T_{a,b}}| \quad \text{in} \quad L_{t\wedge T_{a,b}} \to L_{T_{a,b}}.$$

Ker je $|B_{t\wedge T_{a,b}}| \leq \max(a,b)$, lahko uporabimo izrek o omejeni konvergenci za utemeljitev

$$E\left(|B_{t\wedge T_{a,b}}|\right) \to E\left(|B_{T_{a,b}}|\right),$$

ko $t \to \infty$. Ker je L nenegativen in nepadajoč, tudi $L_{t\wedge T_{a,b}}$ narašča, zato lahko uporabimo izrek o monotoni konvergenci in velja

$$E\left(L_{t\wedge T_{a,b}}\right) \to E\left(L_{T_{a,b}}\right),$$

ko $t \to \infty$. To potrjuje trditev.

2. Iz prvega dela sledi

$$0 = E(M_0) = E\left[(a - L_{T_{a,b}})\cdot 1(B_{T_{a,b}} = a) + (b - L_{T_{a,b}})\cdot 1(B_{T_{a,b}} = -b)\right].$$

Prepišemo v

$$E\left[a1(B_{T_{a,b}} = a) + b1(B_{T_{a,b}} = -b)\right] = E\left(L_{T_{a,b}}\right).$$

Levo stran znamo izračunati;

$$E\left[a1(B_{T_{a,b}} = a) + b1(B_{T_{a,b}} = -b)\right] = a\cdot\frac{b}{a+b} + b\cdot\frac{a}{a+b} = \frac{2ab}{a+b}.$$

Rešitev naloge 5, page 7

1. Po Itôvi formuli je za $f(x) = x^4$

$$B_t^4 = 4\int_0^t B_s^3\,dB_s + 6\int_0^t B_s^2\,ds.$$

Sledi, da je

$$B_t^4 - 6\int_0^t B_s^2 ds = 4\int_0^t B_s^3 dB_s .$$

Desna stran je lokalni martingal. Ker velja, da je $E(B_t^6) = t^3 E(B_1^6)$ in je zadnja pričakovana vrednost končna, velja

$$E\left(\int_0^t B_s^6 ds\right) = \frac{t^4}{4} E(B_1^6) < \infty .$$

Po konstrukciji Itôvega integrala je $\int_0^t B_s^3 dB_s$ martingal.

2. Po izreku o opcijskem ustavljanju je za fiksen $t > 0$

$$E\left(M_{T_a \wedge t}\right) = E\left(M_0\right) = 0 .$$

Sledi, da je

$$E\left(B_{T_a\wedge t}^4\right) = 6E\left(\int_0^{T_a\wedge t} B_s^6 ds\right).$$

Ko $t \to \infty$, konvergira $B_{T_a\wedge t}^4$ proti B_{T_a}, integrandi pa so omejeni z a^4, zato po izreku o dominirani konvergenci velja

$$E\left(B_{T_a\wedge t}^4\right) \to a^4 .$$

Ko $t \to \infty$, konvergira $\int_0^{T_a\wedge t} B_s^6 ds$ proti $\int_0^{T_a} B_s^6 ds$ in sicer monotono. Ker so integrandi nenegativni, po izreku o monotoni konvergenci velja

$$E\left(\int_0^{T_a\wedge t} B_s^6 ds\right) \to E\left(\int_0^{T_a} B_s^6 ds\right).$$

Sledi

$$E\left(\int_0^{T_a} B_s^6 ds\right) = \frac{a^4}{6} .$$

Rešitev naloge 6, page 7

1. Pričakovana vrednost $E(M_t)$ obstaja, saj imata B_t in D_t vse momente. Računamo

$$\begin{aligned} & E\left[M_{t+s}|\mathcal{F}_t\right] \\ = \; & E\Big[\big((B_{t+s} - B_t + B_t)^2 - (t+s)\big)\big((D_{t+s} - D_t + D_t)^2 - (t+s)\big)\mathcal{F}_t\Big] \end{aligned}$$

Zapišemo

$$(B_{t+s} - B_t + B_t)^2 - (t+s) = (B_{t+s} - B_t)^2 + 2(B_{t+s} - B_t)B_t + B_t^2 - (t+s)$$

in

$$(D_{t+s} - D_t + D_t)^2 - (t+s) = (D_{t+s} - D_t)^2 + 2(D_{t+s} - D_t)D_t + D_t^2 - (t+s).$$

Ko zmnožimo in upoštevamo neodvisnost prirastkov od $\mathcal{F}_t$, ostane

$$s^2 + D_t^2 s - (t+s)s + B_t^2 s + B_t^2 D_t^2 - (t+s)s - (t+s)D_t^2 + (t+s)^2,$$

kar je točno $M_t N_t$.

2. Vemo, da B z verjetnostjo 1 doseže nivo 1, zato bo tudi vsota $B_t^2 + D_t^2$ dosegla nivo 1. Zaradi simetrije je točka (B_T, D_T) enakomerno porazdeljena na enotski krožnici, zato je njena porazdelitev enaka porazdelitvi $(\cos(U), \sin(U))$ za $U \sim U(0, 2\pi)$. Sledi

$$E(B_T^2 D_T^2) = E[\cos^2(U)\sin^2(U)] = \frac{1}{4}E[\sin^2(2U)] = \frac{1}{8}.$$

3. Po izreku o opcijskem ustavljanju je

$$E\left[B_{t\wedge T}^2 + D_{t\wedge T}^2\right] = 2E(t \wedge T).$$

Izraz $t \wedge T$ monotono narašča in konvergira proti T. Desna stran zato konvergira proti $E(T)$ po izreku o monotoni konvergenci. Integrand na levi je omejen z 1 in konvergira proti 1, ko $t \uparrow \infty$. Po izreku o dominirani konvergenci leva stran konvergira proti 1. Sledi $E(T) = \frac{1}{2}$.

Za vsak t je po izreku o opcijskem ustavljanju

$$E\left(M_{t\wedge T} N_{t\wedge T}\right) = 0.$$

Napisano na široko to pomeni

$$E\left[B_{T\wedge t}^2 D_{t\wedge T}^2 - (B_{t\wedge T}^2 + D_{t\wedge T}^2)(t \wedge T) + (t \wedge T)^2\right] = 0.$$

Ko $t \uparrow \infty$, prvi člen v pričakovani vrednosti konvergira proti $B_T^2 D_T^2$ in je omejen, drugi člen pa je omejen s T in konvergira proti T. Zadnji člen je nenegativen in monotono narašča. Po izreku o dominirani konvergenci za prva dva člena in monotoni za zadnji člen, velja enakost, ki jo je bilo treba potrditi. Iz vseh enakosti sledi

$$\mathrm{var}(T) = E(T^2) - E(T)^2 = \frac{3}{8} - \frac{2}{8} = \frac{1}{8}.$$

Rešitev naloge 7, page 8

1. Izberimo si

$$X_t = \frac{1}{2}\left(e^{\alpha b} M_t - e^{-\alpha b} N_t\right) = e^{-\frac{\alpha^2}{2}t}\sinh\left(\alpha(B_t + b)\right).$$

Na dogodku $\{T_{-b} < T_a\}$ je $B_T = -b$. Ko vstavimo to v definicijo X sledi, da je $X_T \cdot 1(T_{-b} < T_a) = 0$.

2. V vsoti
$$E(X_T) = E(X_T 1(T_a < T_{-b})) + E(X_T 1(T_{-b} < T_a))$$
upoštevamo, da je $X_T 1(T_{-b} < T_a) = 0$ in trditev sledi.

3. Proces $X_{t\wedge T}$ je omejen s konstanto. Po izreku o opcijskem ustavljanju je $E(X_{t\wedge T}) = E(X_0) = \sinh(\alpha b)$, po izreku o dominirani konvergenci pa je tudi $E(X_T) = \sinh(\alpha b)$. Po drugem delu naloge je
$$X_T 1(T_a < T_{-b}) = e^{-\frac{\alpha^2}{2}T_a} 1(T_a < T_{-b}) \sinh(\alpha(a+b)).$$
Sledi
$$E\left[e^{-\frac{\alpha^2}{2}T_a} 1(T_a < T_{-b})\right] = \frac{\sinh(\alpha b)}{\sinh(\alpha(a+b))}.$$

Rešitev naloge 8, page 8

1. Iz Itôve formule dobimo
$$\begin{aligned} M_t &= M_0 + \int_0^t \left(4B_s^3 - 12B_s D_s^2\right) dB_s + \int_0^t \left(-12B_s^2 D_s + 4D_s^2\right) dD_s \\ &\quad +6\int_0^t \left(B_s^2 - D_s^2\right) ds + 6\int_0^t \left(-B_s^2 + D_s^2\right) ds \\ &= M_0 + \int_0^t \left(4B_s^3 - 12B_s D_s^2\right) dB_s + \int_0^t \left(-12B_s^2 D_s + 4D_s^2\right) dD_s . \end{aligned}$$
Upoštevali smo, da je $\langle B, D\rangle = 0$ zaradi neodvisnosti. Vsi integrandi so kvadratno integrabilni, zato je M martingal.

2. Vemo, da je opcijski čas $T_1 = \inf\{t \geq 0 \colon B_t = 1\}$ končen z verjetnostjo 1. Ker je $T \leq T_1$, isto velja tudi za T. Velja
$$E(M_{T\wedge t}) = 0 .$$
Zaradi omejenosti M^T lahko pošljemo $t \to \infty$ in po izreku o dominirani konvergenci velja $E(M_T) = 0$. Po drugi strani je
$$M_T = (B_T^2 + D_T^2)^2 - 8B_T^2 D_T^2 = 1 - 8B_T^2 D_T^2 .$$
Sledi
$$E(B_T^2 D_T^2) = \frac{1}{8}.$$

Rešitev naloge 9, page 8

1. Po Itôvi formuli je
$$M_t = \int_0^t (3B_s^2 - 3s)dB_s .$$
Za integrand velja
$$\int_0^t E\left[\left(3B_s^2 - 3sB_s\right)^2\right]ds = \int_0^t 18s^2 ds < \infty ,$$
zato je M martingal. Po izreku o opcijskem ustavljanju velja
$$E(M_{T\wedge t}) = E(M_0) = 0$$
za vsak $t > 0$. Prepišemo v
$$E\left(B_{T\wedge t}^3\right) = 3E\left((T\wedge t)B_{T\wedge t}\right) .$$
Na levi strani je integrand po absolutni vrednosti omejen z $\max(a,b)^3$, na desni pa z $\max(a,b)\cdot T$. S predavanj vemo, da je $E(T) < \infty$. Ko $t \to \infty$, lahko na levi in na desni uporabimo izrek o dominirani konvergenci. Sledi
$$E(B_T^3) = a^3 \cdot \frac{b}{a+b} - b^3 \cdot \frac{a}{a+b} = E(TB_T).$$
Poenostavimo v
$$E(TB_T) = ab(a-b).$$
Iz predpostavk izhaja $E(B_T) = 0$, zato je $\mathrm{cov}(B_T, T) = ab(a-b)$.

2. Vemo, da je
$$E(B_T^2) = a^2 \cdot \frac{b}{a+b} + b^2 \cdot \frac{a}{a+b} = ab .$$
Ker je $B_t^2 - t$ martingal, je
$$E(B_{T\wedge t}^2) = E(T\wedge t).$$
Ko $t \to \infty$, na levi uporabimo izrek o dominirani, na desni pa izrek o monotoni konnvergenci. Sledi
$$E(T) = E(B_T^2) = ab .$$
Po Itû je
$$N_t = \int_0^t (4B_s^3 - 12sB_s)dB_s .$$
Za integrand velja
$$\int_0^t E\left[\left(4B_s^3 - 12sB_s\right)^2\right]ds < \infty ,$$

zato je N martingal. Po izreku o opcijskem ustavljanju velja

$$E\left(B_{T\wedge t}^4\right) + 3E\left(T\wedge t\right)) = 6E\left((T\wedge t)B_{T\wedge t}^2\right).$$

Utemejitev, da enakost velja, ko $t\to\infty$, sledi po izrekih o dominirani in monotoni konvergenci. Dobimo

$$E(TB_T) = \frac{1}{6}\cdot\frac{a^4b}{a+b} + \frac{1}{6}\cdot\frac{b^4a}{a+b} + \frac{ab}{2}.$$

Poenostavimo v

$$E(TB_T) = \frac{ab(a^2+ab+b^2)+3ab}{6}$$

in posledično

$$\operatorname{cov}(B_T^2, T) = \frac{ab(a^2+ab+b^2)+3ab}{6} - a^2b^2.$$

Rešitev naloge 10, page 9

1. Najprej opazimo, da je

$$d\mathcal{E}(X)_t = \mathcal{E}(X)_t dB_t.$$

Formula za stohastično odvajanje produkta nam da

$$\begin{aligned} dY_t &= \mathcal{E}(X)_t dB_t \int_0^t \mathcal{E}(X)_t^{-1}\left(B_t dB_t - B_t dt\right) + \mathcal{E}(X)_t\mathcal{E}(X)_t^{-1}\left(B_t dB_t - B_t dt\right) \\ &\quad + B_t dt \\ &= Y_t dB_t + B_t dB_t. \end{aligned}$$

Pri tem smo kvadratično variacijo izračunali z upoštevanjem, da ima eden od procesov omejeno totalno variacijo.

2. Ker je $Y_0 = 0$, dobimo

$$\begin{aligned} Y_t &= \int_0^t dY_s \\ &= \int_0^t Y_s dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t (2B_s dB_s + ds - ds) \\ &= \int_0^t Y_s dB_s + \frac{1}{2}\left(B_t^2 - t\right). \end{aligned}$$

Opazili smo, da je $2B_t dB_t + dt$ diferencial procesa B^2.

3. Izračunajte $F(x,y,t)$ za $t < T$.

Rešitev naloge 11, page 9

1. Enačba samo na drugačen način pove, da je maksimum na $[0,T]$ večji od maksimumov na $[0,t]$ in $[t,T]$. Ker je po markovski lastnosti proces $(B_{t+s}-B_t \colon s \geq 0)$ neodvisen of $\mathcal{F}_t$, trditev sledi iz pravila, da je $E(f(X,Z)|X) = \psi(X)$, kjer je $\psi(x) = E(f(x,Z))$, če sta X in Z neodvisni.

2. Označimo $V = \max_{0\leq s\leq T-t}(B_{t+s}-B_t)$. Veljalo bo
$$E\left(\bar{B}_T|\mathcal{F}_t\right) = E\left(\bar{B}_T|B_t,\bar{B}_t\right) = F(B_t,\bar{B}_t,t).$$
Ker je V neodvisna od $(B_t,\bar{B}_t)$ po markovski lastnosti, je
$$F(x,y,t) = E\left[\max(y,x+V)\right].$$
Porazdelitev V je enaka porazdelitvi $\sqrt{T-t}|Z|$, kjer je $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$. Računamo
$$\begin{aligned}
F(x,y,t) = & \\
= \;& yP(V \leq y-x) + E\left((x+V)1(V > y-x)\right) \\
= \;& yP\left(V \leq y-x\right) + xP\left(V > y-x\right) + E\left(V\cdot 1(V \geq y-x)\right) \\
= \;& yP\left(\sqrt{T-t}|Z| \leq y-x\right) + xP\left(\sqrt{T-t}|Z| > y-x\right) \\
& +E\left(\sqrt{T-t}|Z|\cdot 1(\sqrt{T-t}|Z| > y-x)\right) \\
= \;& y\left(2\Phi\left(\frac{y-x}{\sqrt{T-t}}\right)-1\right) + 2x\left(1-\Phi\left(\frac{y-x}{\sqrt{T-t}}\right)\right) \\
& +\frac{2\sqrt{T-t}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{y-x}{\sqrt{T-t}}}^{\infty} ze^{-z^2/2}dz \\
= \;& y\left(2\Phi\left(\frac{y-x}{\sqrt{T-t}}\right)-1\right) + 2x\left(1-\Phi\left(\frac{y-x}{\sqrt{T-t}}\right)\right) + \frac{2\sqrt{T-t}}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-x)^2}{2(T-t)}}.
\end{aligned}$$

3. Da je M martingal, je očitno. Ker vemo, da mora imeti predstavitev s stohastičnim integralom, je M zvezen. Funkcija $F(x,y,t)$ je za $t < T$ dvakrat zvezno parcialno odvedljiva po vseh spremenljivkah. Itôva formula na da
$$\begin{aligned}
F(B_t,\bar{B}_t,t) - E(\bar{B}_T) = & \\
= \;& \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(B_s,\bar{B}_s,s)dB_s + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial y}(B_s,\bar{B}_s,s)d\bar{B}_s \\
& + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial t}(B_s,\bar{B}_s,s)ds + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(B_s,\bar{B}_s,s)ds.
\end{aligned}$$

Na levi imamo martingal, na desni pa vsoto lokalnega martingala in procesov z omejeno totalno variacijo. Taka enakost implicira, da je vsota procesov z omejeno totalno variacijo enaka 0. Računamo

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,t) = 2 - 2\Phi\left(\frac{y-x}{\sqrt{T-t}}\right).$$

Sledi

$$\bar{B}_T = E(\bar{B}_T) + 2\int_0^T \left(1 - \Phi\left(\frac{\bar{B}_s - B_s}{\sqrt{T-s}}\right)\right) dB_s.$$

Integrand je celo omejen, tako da ustreza vsem pogojem.

Rešitev naloge 12, page 10

1. Najhitreje bo, če izračunamo diferencial dY_t. Itôva formula nam da

$$dY_t = Y_t\left(-\mu(t)dt - \sigma(t)dB_t + \frac{1}{2}\sigma^2(t)dt\right) + \frac{1}{2}Y_t\sigma^2(t)dt.$$

Diferencial dS_t je dan s stohastično diferencialno enačbo na začetku. Dobimo

$$d\langle S, Y\rangle_t = -\sigma(t)^2 S_t Y_t dt.$$

2. Stohastično odvajamo produkt $X_t = S_t Y_t$. Dobimo

$$\begin{aligned} dX_t &= Y_t dS_t + S_t dY_t + d\langle S, Y\rangle_t \\ &= Y_t S_t(\mu(t)dt + \sigma(t)dB_t) \\ &\qquad + S_t Y_t\left(-\mu(t)dt - \sigma(t)dB_t + \frac{1}{2}\sigma^2(t)dt\right) \\ &\qquad\quad -\sigma(s)^2 S_t Y_t dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

Sklepamo, da je X konstanta, torej $X_t = 1$. Sledi, da je

$$S_t = \exp\left(\int_0^t \mu(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(s)ds\right).$$

Rešitev naloge 13, page 10

1. Ker je $S_t > 0$, lahko uporabimo Itôvo formulo za funkcijo $f(x) = \log x$. Dobimo

$$
\begin{aligned}
\log(S_T) - \log(S_0) &= \int_0^T \frac{1}{S_s} dS_s - \frac{1}{2}\int_0^T \frac{1}{S_s^2} d\langle S\rangle_s \\
&= \int_0^T \frac{1}{S_s} dS_s - \frac{1}{2}\int_0^T \frac{1}{S_s^2} \sigma^2(B_s,s) S_s^2 ds \\
&= \int_0^T \frac{1}{S_s} dS_s - \frac{1}{2}\int_0^T \sigma^2(B_s,s) ds .
\end{aligned}
$$

Enačbo pomnožimo z -2 in preuredimo in rezultat sledi.

2. Izračunajmo najprej diferencial drugega člena. Označimo člen v eksponentu z Z_t. Po Itôvi formuli dobimo

$$
\begin{aligned}
d\left(e^{Z_t}\right)_t &= e^{Z_t} dZ_t + \frac{1}{2} e^{Z_t} d\langle Z\rangle_t \\
&= e^{Z_t}\left(-\sigma(B_t,t)dB_t + \frac{1}{2}\sigma^2(B_t,t)dt - \mu(B_t,t)dt + \frac{1}{2}\sigma^2(B_t,t)dt\right).
\end{aligned}
$$

Odvajamo

$$
\begin{aligned}
d\left(S_t e^{Z_t}\right) &= e^{Z_t} dS_t + S_t e^{Z_t} dZ_t + \frac{1}{2} S_t e^{Z_t} d\langle Z\rangle_t + e^{Z_t} d\langle S,Z\rangle_t \\
&= e^{Z_t}\Big(\mu(B_t,t)S_t dt + \sigma(B_t,t)S_t dB_t - \sigma(B_t,t)S_t dB_t \\
&\qquad -\mu(B_t,t)S_t dt + \sigma^2(B_t,t)S_t dt - \sigma^2(B_t,t)S_t dt\Big) \\
&= 0 .
\end{aligned}
$$

Proces Y je konstanten in različen od 0, kar pomeni, $S_t > 0$ s.g.

Rešitev naloge 14, page 11

1. Zapišemo

$$
E\left(|B_T| \middle| \mathcal{F}_t\right) = E\left(|B_T - B_t + B_t| \middle| \mathcal{F}_t\right).
$$

Ker je $B_T - B_t$ neodvisna od $\mathcal{F}_t$, bo veljalo

$$
E\left(|B_T| \middle| \mathcal{F}_t\right) = \psi(B_t),
$$

kjer je

$$\begin{aligned}\psi(x) &= E\left(|B_T - B_t + x|\right)\\ &= E\left(|\sqrt{T-t}Z + x|\right)\\ &= \sqrt{T-t}E\left(\left|\frac{x}{\sqrt{T-t}} + Z\right|\right)\\ &= \sqrt{\frac{2(T-t)}{\pi}}e^{-\frac{x^2}{2(T-t)}} + x\,\mathrm{Erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2(T-t)}}\right).\end{aligned}$$

2. Če lahko napišemo

$$E\left(|B_T|\middle|\mathcal{F}_t\right) = F(B_t, t)$$

za $0 \le t < T$ za funkcijo $F(x,t)$, potem vemo (če je F dovolj lepa), da je

$$|B_T| = E\left(|B_T|\right) + \int_0^T \frac{\partial F}{\partial x}(B_s, s)\,dB_s\,.$$

Sledi, da je

$$H_t = -\sqrt{\frac{2}{\pi(T-t)}}B_t e^{-\frac{B_t^2}{2(T-t)}} + \mathrm{Erf}\left(\frac{B_t}{\sqrt{2(T-t)}}\right) + B_t\sqrt{\frac{2}{\pi(T-t)}}e^{-\frac{B_t^2}{2(T-t)}}\,.$$

Poenostavimo in sledi

$$H_t = \mathrm{Erf}\left(\frac{B_t}{\sqrt{2(T-t)}}\right).$$

Uporaba izreka sloni na tem, da je $F(x,t)$ dvakrat zvezno odvedljiva po x in enkrat po t, kar drži za $t < T$. Na koncu moramo vzeti še limito $t \uparrow T$, in rezultat sledi.

Rešitev naloge 15, page 11

1. Opazimo, da je

$$d\langle X, B\rangle_t = X_t\,dt$$

in

$$d\left(e^{-B_t - \frac{t}{2}}\right) = -e^{-B_t-\frac{t}{2}}\,dB_t\,.$$

Računamo po pravilih za stohastične diferenciale in dobimo

$$\begin{aligned}d\left(e^{-B_t-\frac{t}{2}}X_t\right) &= -e^{-B_t-\frac{t}{2}}X_t\,dB_t + e^{-B_t-\frac{t}{2}}\,dX_t - e^{-B_t-\frac{t}{2}}\,d\langle B, X\rangle_t\\ &= -e^{-B_t-\frac{t}{2}}X_t\,dB_t + e^{-B_t-\frac{t}{2}}\left((1+X_t)dt + X_t\,dB_t\right)\\ &\qquad -e^{-B_t-\frac{t}{2}}X_t\,dt\\ &= e^{-B_t-\frac{t}{2}}\,dt\,.\end{aligned}$$

2. Iz prve točke sledi, da je

$$e^{-B_t-\frac{t}{2}}X_t = \int_0^t e^{-B_s-\frac{s}{2}}ds.$$

Dobimo

$$X_t = e^{B_t+\frac{t}{2}}\int_0^t e^{-B_s-\frac{s}{2}}ds.$$

Rešitev naloge 16, page 12

1. Po Itôvi formuli je

$$dM_t = -M_t dB_t + \frac{1}{2}M_t dt + \frac{1}{2}M_t dt = -M_t dB_t + M_t dt.$$

Ugotovimo, da je

$$\langle M,B\rangle_t = -\int_0^t M_s ds.$$

Po formuli za integracijo per partes je

$$\begin{aligned}\int_0^t M_s B_s dB_s &= \int_0^t B_s(-dM_s + M_s ds)\\ &= -M_t B_t + \int_0^t M_s dB_s + \langle M,B\rangle_t + \int_0^t B_s M_s ds\\ &= -M_t B_t + \int_0^t M_s dB_s - \int_0^t M_s ds + \int_0^t M_s B_s ds.\end{aligned}$$

2. Itô nam da $dM_t^{-1} = M_t^{-1}dB_t$. Iz formule za parcialno odvajanje sledi

$$\begin{aligned}dY_t &= M_t^{-1}dB_t\int_0^t e^{-B_s+\frac{1}{2}s}(2B_s dB_s + (1-2B_s)ds)\\ &\quad +M_t^{-1}M_t(2B_s dB_s + (1-2B_s)ds)\\ &\quad +2B_s ds\\ &= Y_t dB_t + 2B_s dB_s + ds.\end{aligned}$$

Integriramo to zadnjo enačbo od 0 do t in dobimo

$$Y_t = \int_0^t Y_s dB_s + B_t^2.$$

V $2B_s dB_s + ds$ smo razpoznali diferencial B_t^2.

Rešitev naloge 17, page 12

1. Pišimo

$$X_T = e^{-\lambda \int_0^t f(B_s)ds} e^{-\lambda \int_t^T f(B_t + B_T - B_t)ds} = e^{-\lambda \int_0^t f(B_s)ds} e^{-\lambda \int_0^{T-t} f(B_t + B_{t+u} - B_t)du}.$$

   Trditev potem sledi iz $e^{-\lambda \int_0^t f(B_s)ds} \in \mathcal{F}_t$, markovske lastnosti Brownovega gibanja n dejstva, da je $(B_{t+u} - B_t)_{u \geq 0}$ je Brownovo gibanje neodvisno od $\mathcal{F}_t$ ter lastnosti pogojnih pričakovanih vrednosti.

2. (F je npr. dvakrat zvezno odvedljiva v x, č je f dvakrat zvezno odvedljva z omejenima prvim in drugim odvodom (kot sledi iz odvajanja pod integralom – za E in $\int$; izreka o dominirani konvergenci).) Proces $Y = (X_t F(B_t, t), t \in [0, T])$ je zvezen martingal (ki ga lahko razširimo z X_T na (T, ∞)). X je zvezen FV proces in zato zvezen semimartinal.

   Apliciramo Itôvo formulo ter integracijo per partes za ob času S, $S \in [0, T)$, ustavljene procese (F je C^2 v 1. koordinati, 2. koordinata je na $(-\infty, S)$ razreda C^1 /odvajanje pod integralskim znakom, Fundamentalni izrek integralnega računa/) in upoštevamo da morajo vsi členi s končno variacijo biti s.g. enaki konstanti $Y_0 = E(X_T | \mathcal{F}_0) = E(X_T)$ (ker je zvezen lokalen martingal s končno variacijo s.g. konstanten). Dobimo želeno formulo za S namesto T. Končno vzamemo limito $S \uparrow T$, in upoštevamo zveznost procesov, dominirano konvergenco, ter dejstvo da je $\int_0^T X_s \frac{\partial F}{\partial x}(B_s, s)ds < \infty$ (s.g.).

Rešitev naloge 18, page 13

1. Najprej opazimo, da je

$$dZ_t = \lambda Z_t dB_t.$$

   Iz tega sledi, da bo

$$d\langle X, Z\rangle_t = \lambda\sigma X_t Z_t dt.$$

   Računamo

$$\begin{aligned} d\,(XZ)_t &= Z_t dX_t + X_t dZ_t + \lambda\sigma X_t Z_t dt \\ &= Z_t(\mu dt + \sigma X_t dB_t) + \lambda X_t Z_t dB_t + \lambda\sigma X_t Z_t dt \\ &= \mu Z_t dt + \lambda\sigma X_t Z_t dt + (\sigma + \lambda) X_t Z_t dB_t. \end{aligned}$$

2. V prvi točki lahko λ še prosto izbiramo. Izberimo si $\lambda = -\sigma$, tako da bo stohastično del enačbe odpadel. Ostane nam nehomogena linearna diferencialna enačba prvega reda

$$d(XZ)_t = \mu Z_t dt - \sigma^2 X_t Z_t dt,$$

Splošna rešitev zgornje enačbe je

$$X_t Z_t = ce^{-\sigma^2 t} + \mu \int_0^t e^{-\sigma^2(t-s)} Z_s ds.$$

Iz začetnega pogoja sledi $c = 1$. Končna rešitev je

$$X_t = Z_t^{-1}\left(e^{-\sigma^2 t} + \mu \int_0^t e^{-\sigma^2(t-s)} Z_s ds\right).$$

Rešitev naloge 19, page 13

1. Računamo

$$\begin{aligned} dR_t &= 2X_t dX_t + d\langle X\rangle_t + 2Y_t dY_t + d\langle Y\rangle_t \\ &= 2X_t(\alpha X_t dt - Y_t dB_t) + Y_t^2 dt + 2Y_t(\alpha Y_t dt + X_t dB_t) + X_t^2 dt \\ &= (2\alpha+1)(X_t^2 + Y_t^2)dt \\ &= (2\alpha+1)R_t dt. \end{aligned}$$

Iz tega sledi

$$R_t = ce^{(2\alpha+1)t}$$

za neko konstanto c. (Res. Integralska enačba $R_t - 1 = (2\alpha+1)\int_0^t R_s ds$ (kar zgornji diferencialni zapis *v resnici* pomeni) implicira zaradi zveznosti R po fundamentalnem izreku integalskega računa, da je s.g. $\frac{dR_t}{dt} = (2\alpha+1)R_t$.) Iz začetnih pogojev sledi $c = 1$, torej

$$R_t = e^{(2\alpha+1)t}.$$

2. Računamo po Itôvi formuli

$$\begin{aligned} X_t Y_t &= \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y\rangle_t \\ &= \int_0^t X_s(\alpha Y_s ds + X_s dB_s) + \int_0^t Y_s(\alpha X_s ds - Y_s dB_s) - \int_0^t X_s Y_s ds \\ &= 2\alpha \int_0^t X_s Y_s ds + \int_0^t (X_s^2 - Y_s^2) dB_s - \int_0^t X_s Y_s ds. \end{aligned}$$

Če na obeh straneh te enačbe uporabimo pričakovano vrednost, dobimo

$$E(X_t Y_t) = (2\alpha - 1)\int_0^t E(X_s Y_s) ds.$$

To pomeni, da je

$$E(X_t Y_t) = ce^{(2\alpha-1)t}$$

za neko konstanto c. Ker je $Y_0 = 0$, to pomeni, da je $c = 0$. Uporabimo pričakovano vrednost na izhodiščnih enačbah in dobimo

$$E(X_t) - 1 = \alpha \int_0^t E(X_s)ds \quad \text{in} \quad E(Y_t) = \alpha \int_0^t E(Y_s)ds\,.$$

Sledi $E(Y_t) = 0$ in posledično $\operatorname{cov}(X_t, Y_t) = 0$.

Utemeljiti moramo še, da smo lahko naredili vse zamenjave vrstnega reda integralov in pričakovanih vrednosti, ter da so bila upanja ustreznih integralov proti B res enaka nič. To sledi iz neenačb

$$X_s^2 \le R_s \quad \text{in} \quad Y_s^2 \le R_s\,,$$

kar pomeni, da so vsi relevantni integrandi (lokalno) omejeni (Fubini; pogoji za martingalskost).

Rešitev naloge 20, page 13

1. Računamo

$$\begin{aligned} A_T &= A_t + \int_t^T B_s^2 ds \\ &= A_t + \int_t^T (B_t + (B_s - B_t))^2\, ds \\ &= A_t + B_t^2(T-t) + 2B_t \int_0^{T-t} (B_{t+u} - B_t)du + \int_0^{T-t} (B_{t+u} - B_t)^2 du\,. \end{aligned}$$

Po markovski lastnosti je $(B_{t+u} - B_t\colon\, u \ge 0)$ Brownovo gibanje neodvisno of $\mathcal{F}_t$. Opazimo še, da je

$$E\left[\int_0^{T-t} (B_{t+u} - B_t)du\right] = 0$$

in

$$E\left[\int_0^{T-t} (B_{t+u} - B_t)^2 du\right] = \int_0^{T-t} u\,du = \frac{(T-t)^2}{2}\,.$$

Po pravilih za pogojno pričakovano vrednost bo

$$E\left(A_T | \mathcal{F}_t\right) = A_t + B_t^2(T-t) + \frac{(T-t)^2}{2}\,.$$

2. Iz prvega dela sledi, da je
$$E\left(A_T|\mathcal{F}_t\right) = F(B_t, A_t, t).$$
Ker je
$$F(x,y,t) = y + x^2(T-t) + \frac{(T-t)^2}{2},$$
je funkcija dovolj gladka, da uporabimo Itôvo formulo. Sledi
$$\begin{aligned} F(B_t,A_t,t) - F(0,0,0) &= \\ &= \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(B_s,A_s,s)dB_s + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial y}(B_s,A_s,s)dA_s \\ &\quad + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial t}(B_s,A_s,s)ds + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(B_s,A_s,s)ds. \end{aligned}$$
Na levi je martingal. To pomeni, da se morajo na desni členi, ki imajo končno totalno variacijo, sešteti v konstanto. Sledi, da je
$$F(B_t,A_t,t) = \frac{T^2}{2} + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(B_s,A_s,s)dB_s.$$
Sledi
$$H_t = 2B_t(T-t).$$
Očitno je zadoščeno tudi pogoju za integrabilnost.

Rešitev naloge 21, page 14

1. Opazimo najprej, da je
$$dZ_t = Z_t\left(-\alpha dB_t + \frac{1}{2}\alpha^2 dt\right) + \frac{1}{2}\alpha^2 Z_t dt$$
in posledično
$$d\langle Z, X\rangle_t = -\alpha^2 X_t Z_t dt.$$
Računamo po stohastičnem pravilu za odvajanje produkta. Dobimo
$$\begin{aligned} dY_t &= \\ &= X_t dZ_t + Z_t dX_t + d\langle X, Z\rangle_t \\ &= X_t Z_t\left(-\alpha dB_t + \alpha^2 dt\right) + Z_t\left(r dt + \alpha X_t dB_t\right) - \alpha^2 X_t Z_t dt \\ &= r Z_t dt. \end{aligned}$$

2. Iz prvega dela sledi, da je
$$Y_t = 1 + r\int_0^t Z_s ds,$$

kar pomeni

$$X_t = Z_t^{-1} Y_t ,$$

torej

$$X_t = e^{\alpha B_t - \frac{1}{2}\alpha^2 t}\left(1 + r \int_0^t e^{-\alpha B_s + \frac{1}{2}\alpha^2 s} ds\right).$$

Rešitev naloge 22, page 14

1. Računamo

$$\begin{aligned} d(X_t Y_t) &= X_t dY_t + Y_t dX_t + d\langle X, Y\rangle_t \\ &= X_t\left(-Y_t dt + Y_t dB_t^{(1)}\right) + Y_t\left(X_t dB_t^{(1)} + X_t dB_t^{(2)}\right) + X_t Y_t dt \\ &= 2X_t Y_t dB_t^{(1)} + X_t Y_t dB_t^{(2)} . \end{aligned}$$

2. Iz prvega dela naloge sledi, da je

$$X_t Y_t = 1 + 2\int_0^t X_s Y_s dB_s^{(1)} + \int_0^t X_s Y_s dB_s^{(2)} .$$

Prepišemo

$$X_t Y_t = 1 + \sqrt{5}\int_0^t X_s Y_s dW_s .$$

Tako enačbo enolično reši eksponentni martingal

$$X_t Y_t = \mathcal{E}(\sqrt{5}W)_t = \exp\left(\sqrt{5}W_t - \frac{5}{2}t\right)$$

ali

$$X_t Y_t = \exp\left(2B_t^{(1)} + B_t^{(2)} - \frac{5}{2}t\right).$$

3. Ker imamo opravka z eksponentnim martingalom je

$$E(X_t Y_t) = 1 .$$

Iz dejstva da sta $\int_0^t X_s dB_s^{(1)}$ ter $\int_0^t X_s dB_s^{(2)}$ martingala ter iz prve enačbe v besedilu naloge tudi izhaja, da je $E(X_t) = EX_0 = 1$ za vse t. Po drugi strani lahko drugo SDE (Black Scholes enačbo) za Y takoj rešimo: $Y_t = e^{-t}\mathcal{E}(B^{(1)})_t$, in torej $EY_t = e^{-t}$. Sledi

$$\operatorname{cov}(X_t, Y_t) = E(X_t Y_t) - E(X_t)E(Y_t) = 1 - e^{-t} .$$

(Da sta $\int_0^t X_s dB_s^{(1)}$ ter $\int_0^t X_s dB_s^{(2)}$ res martingala vidimo iz $Y_t = e^{-t}\mathcal{E}(B^{(1)})_t$ in iz izraza za $X_t Y_t$: ko izrazimo X_t, vidimo da je le-ta dovolj 'integrabilen' da dobimo martingale.)

Rešitev naloge 23, page 14

1. Zapišemo
$$1 = 1(\bar{B}_t \geq a) + 1(\bar{B}_t < a).$$
Oba člena na desni sta merljiva glede na $\mathcal{F}_t$. Računamo
$$\begin{aligned} E\left(1\left(\bar{B}_T \geq a\right)|\mathcal{F}_t\right) &= \\ &= E\left(1\left(\bar{B}_t \geq a, \bar{B}_T \geq a\right) + 1\left(\bar{B}_t < a, \bar{B}_T \geq a\right)|\mathcal{F}_t\right) \\ &= 1(\bar{B}_t \geq a) + 1(\bar{B}_t < a)E\left(\max_{0\leq s\leq T-t}(B_{t+s} - B_t + B_t)|\mathcal{F}_t\right) \\ &= 1(\bar{B}_t \geq a) + 1(\bar{B}_t < a)E\left(1\left(\max_{0\leq s\leq T-t}(B_{t+s} - B_t + B_t) \geq a\right)|\mathcal{F}_t\right) \\ &= 1(\bar{B}_t \geq a) + 1(\bar{B}_t < a)E\left(1\left(\max_{0\leq s\leq T-t}(B_{t+s} - B_t) \geq a - B_t\right)|\mathcal{F}_t\right) \\ &= 1(\bar{B}_t \geq a) + 1(\bar{B}_t < a)\cdot 2\left(1 - \Phi\left(\frac{a - B_t}{\sqrt{T-t}}\right)\right). \end{aligned}$$
V zadnji vrstici smo uporabili neodvisnost prirastkov Brownovega gibanja ter princip zrcaljenja.

2. Zapišimo z vsemi detajli. $F(x,t)$ je na $(x,t) \in (-\infty, a) \times \times(-\infty, T)$ razreda C^∞. Fiksirajmo $\epsilon \in (0, a \wedge T)$ in uporabimo Itôvo formulo za funkcijo F in za proces $Z := (B_t, t)_{t\in[0,T]}$ ustavljen ob času $T_{a-\epsilon} \wedge (T-\epsilon)$, kjer je $T_b := \inf\{t \geq 0 : B_t = b\}$ za $b \in (0,\infty)$. Ta proces živi v $(-\infty, a)\times(-\infty, T)$ in je zvezen semimartingal. Iz točke (a) je $F \circ Z$ ustavljen proces nekega (s.g.) zveznega (ker je $P(T_a = T) = 0$) martingala na $[0, T-\epsilon]$, in zato zvezen martingal. Sledi da je s.g.:
$$F(B_{T_{a-\epsilon}\wedge(T-\epsilon)}, T_{a-\epsilon} \wedge (T-\epsilon)) = F(0,0) + \int_0^{(T-\epsilon)\wedge T_{a-\epsilon}} \frac{\partial F}{\partial x}(B_t, \bar{B}_t, t)dB_t.$$
Če torej definiramo $H_t := \frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(a-B_t)^2}{2(T-t)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{T-t}}1(t < T_a \wedge T)$ za $t \in [0,T]$, vidimo da je H prilagojen in z desne zvezen in krajši izračun pokaže da je tudi $E\left(\int_0^T H_s^2 ds\right) < \infty$. Velja:
$$F(B_{T_{a-\epsilon}\wedge(T-\epsilon)}, T_{a-\epsilon} \wedge (T-\epsilon)) = P\left(\bar{B}_T \geq a\right) + \int_0^{(T-\epsilon)\wedge T_{a-\epsilon}} H_t dB_t.$$
Spustimo $\epsilon \downarrow 0$ (čez neko zaporedje), upoštevajmo zveznost stohastičnega integrala, $T_{a-\epsilon} \wedge (T-\epsilon) \uparrow T_a \wedge T$, in dobimo s.g. (ker je $T_a \neq T$ s.g.) željeno enakost, če naposled še opazimo da je $\int_0^{T_a\wedge T} H_t dB_t = \int_0^T H_t dB_t$, saj je vendar $H^{T_a\wedge T} = H$.

Rešitev naloge 24, page 15

1. Računamo po stohastičnih pravilih za odvajanje produktov (iz SDE-jev je razvidno da sta X in Y zvezna semimartingala). Ker je v produktih ena funkcija deterministična in odvedljiva, križne kvadratične variacije odpadejo. Dobimo

$$\begin{aligned} & d\left(e^{-t}X_t - te^{-t}Y_t\right) = \\ &= -e^{-t}X_t dt + e^{-t}dX_t - (e^{-t} - te^{-t})Y_t dt - te^{-t}dY_t \\ &= -e^{-t}X_t dt + e^{-t}\left(X_t dt + Y_t dt + dW_t^{(1)}\right) \\ &\qquad - (e^{-t} - te^{-t})Y_t dt - te^{-t}\left(Y_t dt + dW_t^{(2)}\right) \\ &= e^{-t}dW_t^{(1)} - te^{-t}dW_t^{(2)} \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} & d\left(e^{-t}Y_t\right) = \\ &= -e^{-t}Y_t dt + e^{-t}dY_t \\ &= -e^{-t}Y_t dt + e^{-t}\left(Y_t dt + dW_t^{(2)}\right) \\ &= e^{-t}dW_t^{(2)}. \end{aligned}$$

2. Iz prvega dela naloge dobimo, da je

$$e^{-t}X_t - te^{-t}Y_t = \int_0^t e^{-s}dW_s^{(1)} - \int_0^t se^{-s}dW_s^{(2)} \quad \text{in} \quad e^{-t}Y_t = \int_0^t e^{-s}dW_s^{(2)}.$$

Sledi

$$X_t = \int_0^t e^{t-s}dW_s^{(1)} + \int_0^t (t-s)e^{t-s}dW_s^{(2)} \quad \text{in} \quad Y_t = \int_0^t e^{t-s}dW_s^{(2)}.$$

3. Po pravilih za križne kvadratične variacije je

$$d\langle M,N\rangle_t = e^{-2t}d\langle W^{(1)},W^{(2)}\rangle_t - te^{-2t}d\langle W^{(2)},W^{(2)}\rangle_t.$$

Zaradi neodvisnosti Brownovih gibanj prvi člen odpade, zato je

$$d\langle M,N\rangle_t = -te^{-2t}dt$$

in posledično

$$\langle M,N\rangle_t = -\int_0^t se^{-2s}ds.$$

Iz namiga je

$$E\left(M_tN_t\right) = E\left(\langle M,N\rangle_t\right).$$

Sledi

$$E\Big[(e^{-t}X_t - te^{-t}Y_t)(e^{-t}Y_t)\Big] = e^{-2t}E(X_tY_t) - te^{-2t}E(Y_t^2) = E\left(\langle M,N\rangle_t\right).$$

Po drugi strani iz Itôve izometrije sledi

$$E\left(e^{-2t}Y_t^2\right) = \int_0^t e^{-2s}ds.$$

Torej je

$$E(X_tY_t) = e^{2t}\Big[tE(e^{-2t}Y_t^2) + E\left(\langle M,N\rangle_t\right)\Big].$$

Vstavimo integrale in poračunamo. Dobimo

$$E(X_tY_t) = \frac{1}{4}\Big(1 + e^{2t}\left(2t-1\right)\Big).$$

Ker je $E(X_t) = E(Y_t) = 0$, je zgornji izraz tudi kovarianca.

Rešitev naloge 25, page 16

1. Računamo z diferenciali in opazimo, da je $A_t = \langle M\rangle_t$. Dobimo

$$\begin{aligned} dM_t &= \frac{\lambda^2}{2}e^{\frac{\lambda^2}{2}A_t}\cos(\lambda X_t)dA_t - e^{\frac{\lambda^2}{2}A_t}\left(\lambda\sin(\lambda X_t)dX_t - \frac{\lambda^2}{2}\cos(\lambda X_t)d\langle X\rangle_t\right) \\ &= e^{\frac{\lambda^2}{2}A_t}\left(\frac{\lambda^2}{2}\cos(\lambda X_t)dA_t - \lambda\sin(\lambda X_t)1(B_t>0)dB_t - \frac{\lambda^2}{2}\cos(\lambda X_t)dA_t\right) \\ &= -\lambda e^{\frac{\lambda^2}{2}A_t}\sin(\lambda X_t)1(B_t>0)dB_t. \end{aligned}$$

Podobno računamo za N.

2. T je čas ustavljanja. Proces $(M_{T\wedge t})_{t\in[0,\infty)}$ je omejen lokalni martingal, torej martingal, in lahko uporabimo dejstvo, da imajo martingali konstantno upanje, pa dobimo

$$E(M_{T\wedge t}) = 1.$$

Ko $t\to\infty$ zaradi predpostavk in zveznosti M_t sledi, da $M_{T\wedge t}\to M_T$. Zaradi omejenosti lahko uporabimo izrek o dominirani konvergenci in dobimo

$$E(M_T) = 1.$$

Ker je $A_T = 1$, sledi, da je

$$E\left(\cos(\lambda X_T)\right) = e^{-\frac{\lambda^2}{2}}.$$

Podobno sklepamo, da je

$$E\left(\sin(\lambda X_T)\right) = 0.$$

Sledi, da je $X_T \sim \mathrm{N}(0,1)$.

Rešitev naloge 26, page 16

1. Računamo po pravilih za stohastične diferenciale. Dobimo

$$
\begin{aligned}
& d\left(e^{-2t}(1+t)X_t - te^{-2t}Y_t\right) \\
&\quad = e^{-2t}(-1-2t)X_t dt + e^{-2t}(1+t)dX_t + e^{-2t}(-1+2t)Y_t dt - te^{-2t}dY_t \\
&\quad = e^{-2t}\Big[(-1-2t)X_t dt + (1+t)\Big(X_t dt + Y_t dt + dB_t^{(1)}\Big) \\
&\qquad\qquad + (-1+2t)Y_t dt - t\Big(-X_t dt + 3Y_t dt + dB_t^{(2)}\Big)\Big] \\
&\quad = e^{-2t}(1+t)dB_t^{(1)} - te^{-2t}dB_t^{(2)}
\end{aligned}
$$

   in

$$
\begin{aligned}
& d\left(te^{-2t}X_t + e^{-2t}(-t+1)Y_t\right) \\
&\quad = e^{-2t}(1-2t)X_t dt + te^{-2t}dX_t + e^{-2t}(-3+2t)Y_t dt + e^{-2t}(-t+1)dY_t \\
&\quad = e^{-2t}\Big[(1-2t)X_t dt + t\Big(X_t dt + Y_t dt + dB_t^{(1)}\Big) \\
&\qquad\qquad + (-3+2t)Y_t dt + (-t+1)\Big(-X_t dt + 3Y_t dt + dB_t^{(2)}\Big)\Big] \\
&\quad = te^{-2t}dB_t^{(1)} + e^{-2t}(-t+1)dB_t^{(2)}.
\end{aligned}
$$

2. Iz prvega dela izhaja, da je

$$
\begin{aligned}
e^{-2t}(1+t)X_t - te^{-2t}Y_t &= M_t \\
te^{-2t}X_t + e^{-2t}(-t+1)Y_t &= N_t.
\end{aligned}
$$

   Enačbi rešimo in sledi

$$X_t = e^{2t}(-t+1)M_t + te^{2t}N_t \quad \text{ter} \quad Y_t = -te^{2t}M_t + e^{2t}(t+1)N_t.$$

3. Iz bilinearnosti za oklepaje in dejstva, da je $\langle B^{(1)}, B^{(2)}\rangle_t = 0$, dobimo

$$\langle M, N\rangle_t = \int_0^t e^{-4s}s(1+s)ds - \int_0^t e^{-4s}s(-s+1)ds.$$

   Ker je $M_t N_t - \langle M, N\rangle_t$ martingal z začetno vrednostjo 0 in je $E(M_t) = E(N_t) = 0$, je $\mathrm{cov}(M_t, N_t) = E\langle M, N\rangle_t = \langle M, N\rangle_t$ Zadnja enakost velja, ker je $\langle M, N\rangle$ determinističen proces.

4. Iz eksplicitne rešitve za X_t in Y_t izhaja, da je

$$\mathrm{cov}(X_t, Y_t) = -e^{4t}t(-t+1)\mathrm{var}(M_t) + e^{4t}t(t+1)\mathrm{var}(N_t) + e^{4t}(1-2t^2)\mathrm{cov}(M_t, N_t).$$

   Upoštevamo, da je $\mathrm{var}(M_t) = \langle M\rangle_t$, $\mathrm{var}(N_t) = \langle N\rangle_t$ in $\mathrm{cov}(M_t, N_t) = \langle M, N\rangle_t$ (utemeljitve kot pri točki 3.).

Rešitev naloge 27, page 17

1. Gostota B_T pogojno na $B_t = x$ enaka

$$p_{T-t}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2(T-t)}}\,.$$

Sledi, da je

$$\begin{aligned}
E\left(B_T^+ | B_t = x\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} y^+ p_{T-t}(x,y)dy \\
&= \int_0^{\infty} y\, p_{T-t}(x,y)dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_0^{\infty} y e^{-\frac{(y-x)^2}{2(T-t)}} dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_0^{\infty} [(y-x)+x] e^{-\frac{(y-x)^2}{2(T-t)}} dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \left(-(T-t) e^{-\frac{(y-x)^2}{2(T-t)}} \Big|_0^{\infty} + x \int_0^{\infty} e^{-\frac{(y-x)^2}{2(T-t)}} dy \right) \\
&= \frac{\sqrt{T-t}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2(T-t)}} + x\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{T-t}}\right).
\end{aligned}$$

Zaradi markovske lastnosti je

$$E\left(B_T^+ | \mathcal{F}_t\right) = \frac{\sqrt{T-t}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{B_t^2}{2(T-t)}} + x\Phi\left(\frac{B_t}{\sqrt{T-t}}\right).$$

2. Ker je

$$E\left(B_T^+ | \mathcal{F}_t\right) = F(B_t, t)$$

za $0 \leq t < T$ in je $F(x,t)$ tam gladka funkcija, bo veljalo

$$E\left(B_T^+ | \mathcal{F}_t\right) = E(B_T^+) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(B_s, s) dB_s\,.$$

S parcialnim odvajanjem dobimo

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,t) = \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{T-t}}\right),$$

torej je

$$H_t = \Phi\left(\frac{B_t}{\sqrt{T-t}}\right).$$

Ker je

$$U_t = E\left(B_T^+ | \mathcal{F}_t\right)$$

zvezen martingal (kot vsi Brownovi martingali), velja $U_t \to U_T = B_T^+$, ko $t \uparrow T$. To pomeni, da bi reprezentacija veljala, ne glede na to, kako razširimo H_t do časa T. Ena možnost je $H_T = 0$.

Rešitev naloge 28, page 17

1. Funkcija F je dvakrat zvezno odvedljiva. Računamo

$$F''(x) = -2xe^{-x^2}.$$

Po Itôvi formuli je ($y_0 := F(x_0)$)

$$\begin{aligned} Y_t &= y_0 + \int_0^t F'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t F''(X_s)d\langle X\rangle_s \\ &= y_0 + \int_0^t e^{-X_s^2}(dB_s + X_s ds) - \frac{1}{2}\int_0^t 2X_s e^{-X_s^2} ds \\ &= y_0 + \int_0^t e^{-X_s^2} dB_s. \end{aligned}$$

Proces je omejen lokalni martingal in zato martingal.

2. Funkcija $F(x)$ je monotono naraščajoča in $F(0) = 0$. Ker je $F(X_t)$ martingal, vemo da bo

$$P(T_a < T_0) = P\left(F(X_{T_{0,a}}) = F(a)\right) = \frac{F(x_0)}{F(a) - F(0)}.$$

Zaradi zveznosti X velja

$$\{T_0 < \infty\} = \cup_{a > x_0}\{T_0 < T_a\}.$$

Dogodki v uniji so naraščajoči, zato bo veljalo

$$P(T_0 < \infty) = \lim_{a\to\infty} P(T_0 < T_a).$$

Sledi

$$P(T_0 = \infty) = \frac{2F(x_0)}{\sqrt{\pi}}.$$

3. Računamo

$$d(e^{-t}X_t) = -e^{-t}X_t dt + e^{-t}(dB_t + X_t dt) = e^{-t}dB_t.$$

Sledi, da je

$$e^{-t}X_t = x_0 + \int_0^t e^{-s}dB_s.$$

Integral na desni je martingal, zato je

$$E(e^{-t}X_t) = x_0$$

in posledično

$$E(X_t) = e^t x_0\,.$$

Za varianco uporabimo Itôvo izometrijo in dobimo

$$\operatorname{var}\left(e^{-t}X_t\right) = \operatorname{var}\left(\int_0^t e^{-s}dB_s\right) = E\left[\int_0^t e^{-s}dB_s\right] = \int_0^t e^{-2s}ds = \frac{1}{2}\left(1-e^{-2t}\right).$$

Sledi

$$\operatorname{var}(X_t) = \frac{1}{2}\left(e^{2t}-1\right).$$

Rešitev naloge 29, page 17

1. Po pravilu za stohastično odvajanje produkta na desni strani dobimo

   $$dX_t = 2(1+t)Y_t dt + (1+t)^2 dY_t\,,$$

   na levi pa iz SDE za X,

   $$\left(2Y_t(1+t)-(1+t)^2\right)dt + (1+t^2)dW_t\,.$$

   Izenačimo levo in desno stran in pokrajšamo. Ostane enačba

   $$dY_t = -dt + dW_t\,.$$

2. Ker mora biti $Y_0 = x_0$ dobimo

   $$Y_t = x_0 - t + W_t$$

   in posledično

   $$X_t = (1+t)^2\,(x_0 - t + W_t)\,.$$

   Sledi

   $$E(X_t) = (1+t)^2(x_0-t) \qquad \text{in} \qquad \operatorname{var}(X_t) = t(1+t)^4\,.$$

Rešitev naloge 30, page 18

1. Enačbi v nalogi seštejemo in prepišemo dW_t iz definicij. Opazimo še to, da je integrand pred dE_s identično enak 0.

2. Proces W je po definiciji lokalni martingal. Iz definicije sledi

   $$\langle W\rangle_t = \int_0^t 1(X_s+Y_s>0)\frac{X_s+Y_s}{X_s+Y_s}ds + \int_0^t 1(X_s+Y_s=0)ds = t\,.$$

   Zaradi neodvisnosti Brownovih gibanj so vse vse križne kvadratične variacije enake 0. Po Lévyjevem izreku sledi, da je W Brownovo gibanje.

3. Zaradi neodvisnosti X in Y lahko desno stran enakosti zapišemo kot

$$\phi(x,\alpha)\phi(y,\beta) = E\left(e^{-\lambda(X_t+Y_t)}\right).$$

Ampak vsota $X+Y$ je po prejšnji točki rešitev stohastične diferencialne enačbe (sicer z drugim Brownovim gibanjem) z začetnim pogojem $x+y$ in tendenco $\alpha+\beta$. Enakost potem sledi iz krepke enoličnosti rešitve.

4. Iz prejšnje točke lahko sklepamo, da je

$$\phi(x,\alpha) = \phi(x,0)\phi(0,\alpha).$$

Za prvo funkcijo velja multiplikativnost iz namiga, zato je

$$\phi(x,0) = e^{c_1 x}.$$

Z enakim razmislekom dobimo

$$\phi(0,\alpha) = e^{c_2\alpha}.$$

Velja torej

$$\phi(x,\alpha) = e^{c_1 x}\cdot e^{c_2\alpha},$$

kjer sta konstanti c_1 in c_2 še odvisni od t in λ. V znano obliko za $\alpha = 1$ vstavimo $x=0$, določimo $e^{c_2} = (1+2\lambda t)^{-1/2}$ in potem $\phi(x,\alpha) = (1+2\lambda t)^{-\alpha/2}\exp\left(-\frac{\lambda x}{1+2\lambda t}\right)$.

Rešitev naloge 31, page 19

1. Po Itû je

$$dX_t = 2(B_t+1)dB_t + 2D_t dD_t + 2dt.$$

Iz dX_t sledi še

$$d\langle X\rangle_t = 4(B_t+1)^2 dt + 4D_t^2 dt = 4X_t dt,$$

pri čemer smo upoštevali, da je $\langle B, D\rangle = 0$.

2. Proces Y^T je omejen (natančneje ima vrednosti v $[\frac{1}{2}\log a, \frac{1}{2}\log b]$), zato je treba pokazati le da je lokalni martingal. Na intervalu $(0,\infty)\supset[a,b]$ je funkcija $\frac{1}{2}\log x$ dvakrat zvezno odvedljiva. Po Itôvi formuli je

$$\begin{aligned} Y_t^T &= \int_0^t \frac{dX_s^T}{2X_s^T} - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d\langle X\rangle_s^T}{2(X_s^T)^2} \\ &= \int_0^t \frac{(B_s^T+1)dB_s^T + D_s^T dD_s^T}{X_s^T}. \end{aligned}$$

3. Zaradi injektivnosti logaritma je
$$P(X_T = a) = P(Y_T = \tfrac{1}{2}\log a).$$
Po drugi točki je Y^T omejen martingal, zato je
$$E(Y_T) = E(Y_0) = 0$$
ali
$$\frac{1}{2}\log a \cdot P(X_T = a) + \frac{1}{2}\log b \cdot P(X_t = b) = 0.$$
Po drugi strani je zaradi zveznosti (dovolj z desne) poti X-a, $P(X_T = a) + P(X_T = b) = 1$. Rešimo enačbe in dobimo
$$P(X_T = a) = \frac{\log b}{\log b - \log a}.$$

Rešitev naloge 32, page 19

1. Za neodvisni Brownovi gibanji je $\langle B, D\rangle = 0$. Po pravilih za računanje kvadratičnih variacij je
$$\begin{aligned}\langle B\cdot D + D\cdot B\rangle &= \langle B\cdot D\rangle + 2\langle B\cdot D, D\cdot B\rangle + \langle D\cdot B\rangle \\ &= B^2\cdot\langle D\rangle + 2BD\cdot\langle B, D\rangle + D^2\cdot\langle B\rangle.\end{aligned}$$
Sledi
$$d\langle M\rangle_t = \alpha^2(B_t^2 + D_t^2)dt.$$

2. Procesa M in N sta zvezna semimartingala: M je celo zvezen lokalen martigal, N pa zvezen prilagojen proces s končno variacijo. Itôva formula nam da
$$\begin{aligned}X_t - 1 &= \int_0^t \cos(M_s)e^{N_s}dN_s - \int_0^t \sin(M_s)e^{N_s}dM_s \\ &\quad -\frac{1}{2}\int_0^t \cos(M_s)e^{N_s}d\langle M\rangle_s \\ &= \int_0^t \cos(M_s)e^{N_s}\frac{\alpha^2}{2}(B_s^2 + D_s^2)ds - \int_0^t \sin(M_s)e^{N_s}dM_s \\ &\quad -\frac{1}{2}\int_0^t \cos(M_s)\,e^{N_s}\alpha^2(B_s^2 + D_s^2)ds \\ &= -\int_0^t \sin(M_s)\,e^{N_s}dM_s.\end{aligned}$$
Iz zgornjega sledi, da je X lokalni martingal.

Rešitev naloge 33, page 19

1. Računamo

$$\begin{aligned} E(X|\mathcal{F}_t) &= E\left(1(T_1 \le t) + 1(t < T_1 \le 1)|\mathcal{F}_t\right) \\ &= 1(T_1 \le t) + 2 \cdot 1(T_1 > t)\left(1 - \Phi\left(\frac{1 - B_t}{\sqrt{1-t}}\right)\right) \\ &= 1(\bar{B}_t \ge 1) + 2 \cdot 1(\bar{B}_t < 1)\left(1 - \Phi\left(\frac{1 - B_t}{\sqrt{1-t}}\right)\right). \end{aligned}$$

   Pri tem smo uporabili markovsko lastnost Brownovega gibanja.

2. Pogojna pričakovana vrednost je oblike

$$E(X|\mathcal{F}_t) = F(B_t, \bar{B}_t, t),$$

   kjer je $\bar{B}_t = \max_{0 \le s \le t} B_s$, ker je $1(T_1 \le t) = 1(\bar{B}_t \ge 1)$. Vemo, da pri ustrezni parcialni odvedljivosti velja

$$H_t = \partial_1 F\left(B_s, \bar{B}_s, s\right) dB_s.$$

   Če odvedljivost velja le dokler je $t < T$ za nek čas ustavljanja T, reprezentacija velja do T. Za $t < T_1 \wedge 1$ imamo ustrezno odvedljivost, zato velja za

$$Y_t = E(X|\mathcal{F}_t)$$

   enačba

$$Y_{t \wedge T_1} = Y_0 + 2\int_0^{t \wedge T_1} 1(\bar{B}_s < 1)\frac{1}{\sqrt{1-s}}\phi\left(\frac{1 - B_s}{\sqrt{1-s}}\right) dB_s, \quad t < 1.$$

3. V reprezentaciji v drugi točki lahko za $t < 1$ zapišemo

$$Y_{t \wedge T_1} = Y_0 + 2\int_0^{t} 1(\bar{B}_s < 1)\frac{1}{\sqrt{1-s}}\phi\left(\frac{1 - B_s}{\sqrt{1-s}}\right) dB_s$$

   zaradi lokalizacije. Ko $t \uparrow 1$, leva stran konvergira proti X s.g. Če definiramo $H_1 = 0$ in

$$H_s = 2 \cdot 1(\bar{B}_s < 1)\frac{1}{\sqrt{1-s}}\phi\left(\frac{1 - B_s}{\sqrt{1-s}}\right),$$

   potem tudi $\int_0^t H_s dB_s$ konvergira proti $\int_0^1 H_s dB_s$, ko $t \uparrow 1$ s.g.

Rešitev naloge 34, page 20

1. Po pravilih za odvajanje produkta je

$$dY_t = -\tfrac{1}{2}e^{-t/2}X_t dt + e^{-t/2}dX_t .$$

Vstavimo dX_t iz enačbe v besedilu naloge, pokrajšamo in enačba sledi. Za proces Z najprej računamo po Itû, s tem da opazimo

$$d\langle X\rangle_t = (1+X_t^2)dt .$$

Dobimo

$$\begin{aligned} d\left(\sqrt{1+X_t^2}\right) & \\ &= \frac{X_t}{\sqrt{1+X_t^2}}dX_t + \frac{1}{2(1+X_t^2)^{3/2}}d\langle X\rangle_t \\ &= X_t dB_t + X_t dt + \frac{X_t^2}{2\sqrt{1+X_t^2}}dt + \frac{1}{2\sqrt{1+X_t^2}}dt \\ &= X_t dB_t + X_t dt + \tfrac{1}{2}\sqrt{1+X_t^2}\,dt . \end{aligned}$$

Po formuli za odvajanje produkta sledi

$$dZ_t = -\tfrac{1}{2}e^{-t/2}\sqrt{1+X_t^2}\,dt + e^{-t/2}\left(X_t dB_t + X_t dt + \tfrac{1}{2}\sqrt{1+X_t^2}\,dt\right).$$

Ko pokrajšamo, dobimo želeno enačbo.

2. Enačbi iz prejšnje točke prepišemo v integralski obliki v

$$Y_t = x_0 + \int_0^t Z_s dB_s + \int_0^t Z_s ds \quad \text{in} \quad Z_t = \sqrt{1+x_0^2} + \int_0^t Y_s dB_s + \int_0^t Y_s ds .$$

Izrek o obstoju rešitev SDE nam zagotavlja, da so $E(X_s^2)$, (in zato) $E(Y_s^2)$ in $E(Z_s^2)$ omejene na končnih intervalih, zato sta stohastična integrala v enačbah martingala. Na obeh straneh uporabimo pričakovano vrednost, zamenjamo integral po času in pričakovano vrednost (Fubini) in sledi

$$E(Y_t) = x_0 + \int_0^t E(Z_s)ds \qquad \text{in} \qquad E(Z_t) = \sqrt{1+x_0^2} + \int_0^t E(Y_s)ds .$$

To sta želeni enačbi.

3. Diferencialni enačbi sledita iz prejšnje točke. Če ju seštejemo, dobimo

$$\dot a + \dot b = a + b ,$$

od koder sledi

$$a(t) + b(t) = (a(0) + b(0))e^t .$$

Če odštejemo, dobimo
$$\dot{a}-\dot{b}=b-a$$
od koder sledi
$$a(t)-b(t)=(a(0)-b(0))e^{-t}.$$
Upoštevamo $a(0)=x_0$ in $b(0)=\sqrt{1+x_0^2}$ in dobimo
$$a(t)=x_0\cosh t+\sqrt{1+x_0^2}\,\sinh t \quad \text{in} \quad b(t)=x_0\sinh t+\sqrt{1+x_0^2}\,\cosh t.$$
Končno
$$E(X_t)=e^{t/2}E(Y_t)=e^{t/2}\left(x_0\cosh t+\sqrt{1+x_0^2}\,\sinh t\right).$$

4. Preverimo
$$\begin{aligned}
X_0 &= \sinh\left(\log\left(x_0+\sqrt{1+x_0^2}\right)\right)\\
&= \frac{x_0+\sqrt{1+x_0^2}-\frac{1}{x_0+\sqrt{1+x_0^2}}}{2}\\
&= \frac{x_0^2+2x_0\sqrt{1+x_0^2}+1+x_0^2-1}{2(x_0+\sqrt{1+x_0^2})}\\
&= \frac{2x_0(x_0+\sqrt{1+x_0^2})}{2(x_0+\sqrt{1+x_0^2})}\\
&= x_0.
\end{aligned}$$
Označimo
$$Y_t=\log\left(x_0+\sqrt{1+x_0^2}\right)+B_t^{(1)}.$$
Itôva formula in enakost $\cosh^2-\sinh^2=1$ dasta
$$\begin{aligned}
dX_t &= \cosh(Y_t)dY_t+\frac{1}{2}\sinh(Y_t)d\langle Y\rangle_t\\
&= \sqrt{1+X_t^2}dY_t+\frac{1}{2}\sinh(Y_t)dt\\
&= \sqrt{1+X_t^2}(dB_t+dt)+\frac{1}{2}X_tdt\\
&= \sqrt{1+X_t^2}dB_t+\left(\sqrt{1+X_t^2}+\tfrac{1}{2}X_t\right)dt.
\end{aligned}$$

Rešitev naloge 35, page 21

1. Računamo po stohastični formuli za odvod produkta in opazimo, da je prvi člen na desni v definiciji proces Y zvezno odvedljiv. Dobimo

$$\begin{aligned} dY_t &= -\exp\left(-\int_0^t F(u)du\right)F(t)Z_t dt + \exp\left(-\int_0^t F(u)du\right)dZ_t \\ &= -\exp\left(-\int_0^t F(u)du\right)F(t)Z_t dt \\ &\quad + \exp\left(-\int_0^t F(u)du\right)(F(t)Z_t dt + G(t)dM_t) \\ &= \exp\left(-\int_0^t F(u)du\right)G(t)M_t dB_t\,. \end{aligned}$$

Sledi

$$Y_t = z_0 + \int_0^t \exp\left(-\int_0^u F(s)ds\right)G(u)M_u dB_u$$

in posledično

$$Z_t = \exp\left(\int_0^t F(u)du\right)\left(z_0 + \int_0^t \exp\left(-\int_0^u F(s)ds\right)G(u)M_u dB_u\right).$$

2. Označimo

$$H_u = \exp\left(-\int_0^u F(s)ds\right)G(u)M_u\,.$$

Vemo, da je

$$\begin{aligned} E(M_u^2) &= E\left[\exp(2B_t - t)\right] \\ &= E\left[\exp(2B_t - 2t + t)\right] \\ &= e^t\,. \end{aligned}$$

Za integrand H velja

$$\int_0^t E(H_s^2)ds = \int_0^t \exp\left(-2\int_0^u F(s)ds\right)G(u)^2 e^u du < \infty\,.$$

Integral zgornje meje je martingal, zato je pričakovana vrednost enaka 0 in sledi

$$Z_t - E(Z_t) = \exp\left(\int_0^t F(u)du\right)\int_0^t \exp\left(-\int_0^u F(s)ds\right)G(u)M_u dB_u\,.$$

Itôva izometrija nam da

$$E\left[(Z_t - E(Z_t))^2\right] = \exp\left(2\int_0^t F(u)du\right)\int_0^t \exp\left(-2\int_0^u F(s)ds\right)G(u)^2 e^u du\,.$$

Rešitev naloge 36, page 21

1. Računamo

$$
\begin{aligned}
A_T &= A_t + \int_t^T B_s^2 ds \\
&= A_t + \int_t^T (B_t + (B_s - B_t))^2 ds \\
&= A_t + B_t^2(T-t) + 2B_t \int_0^{T-t} (B_{t+u} - B_t) du + \int_0^{T-t} (B_{t+u} - B_t)^2 du .
\end{aligned}
$$

Po markovski lastnosti je $(B_{t+u} - B_t : u \geq 0)$ Brownovo gibanje neodvisno of $\mathcal{F}_t$. Opazimo še, da je

$$
E\left[\int_0^{T-t} (B_{t+u} - B_t) du\right] = 0
$$

in

$$
E\left[\int_0^{T-t} (B_{t+u} - B_t)^2 du\right] = \int_0^{T-t} u du = \frac{(T-t)^2}{2} .
$$

Po pravilih za pogojno pričakovano vrednost bo

$$
E(A_T | \mathcal{F}_t) = A_t + B_t^2(T-t) + \frac{(T-t)^2}{2} .
$$

2. Iz prvega dela sledi, da je

$$
E(A_T | \mathcal{F}_t) = F(B_t, A_t, t) .
$$

Ker je

$$
F(x, y, t) = y + x^2(T-t) + \frac{(T-t)^2}{2} ,
$$

je funkcija dovolj gladka, da uporabimo Itôvo formulo. Sledi

$$
\begin{aligned}
& F(B_t, A_t, t) - F(0,0,0) = \\
& \quad = \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(B_s, A_s, s) dB_s + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial y}(B_s, A_s, s) dA_s \\
& \qquad + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial t}(B_s, A_s, s) ds + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(B_s, A_s, s) ds .
\end{aligned}
$$

Na levi je martingal. To pomeni, da se morajo na desni členi, ki imajo končno totalno variacijo, sešteti v konstanto. Sledi, da je

$$
F(B_t, A_t, t) = \frac{T^2}{2} + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(B_s, A_s, s) dB_s .
$$

Sledi

$$
H_t = 2B_t(T-t) .
$$

Očitno je zadoščeno tudi pogoju za integrabilnost.

Rešitev naloge 37, page 22

1. Ker je $X_{t\wedge T} \in [a,b]$ in je g C^2 funkcija na intervalu $[a,b]$ lahko računamo po Itôvi formuli

$$\begin{aligned} g(X_{t\wedge T}) &= g(x) + \int_0^{t\wedge T} \frac{1}{(1-X_s)^2} dX_s + \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge T} \frac{2}{(1-X_s)^3} d\langle X\rangle_s \\ &= g(x) + \int_0^{t\wedge T} \frac{\sqrt{X_s(1-X_s)}}{(1-X_s)^2} dW_s, \end{aligned}$$

kjer smo upoštevali, da je

$$d\langle X\rangle_t = X_t(1-X_t)dt$$

Stohastični integral omejenega zveznega procesa po Brownovem gibanju je lokalni martingal.

2. Ker je g omejen na $[a,b]$, je lokalni martingal $g(X_{t\wedge T})$ iz prejšnje točke tudi omejen martingal (z začetno vrednostjo $g(x)$). Glede na to, da je g naraščajoča funkcija na $[a,b]$ in dejstvo, da je $T < \infty$ s.g., lahko po izreku o ustavljanju dobimo izhodno porazdelitev iz intervala $[a,b]$ za $g(X_{t\wedge T})$.

$$\begin{aligned} P(X_T = a) &= P(T_a < T_b) = \frac{g(b)-g(x)}{g(b)-g(a)} \\ P(X_T = b) &= P(T_b < T_a) = \frac{g(x)-g(a)}{g(b)-g(a)} \end{aligned}$$

3. Za Itôvo formulo potrebujemo prva dva odvoda funkcije h:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{x-\log(x)}{(1-x)^2} \\ h''(x) &= \frac{x^2+2x-1-2x\log(x)}{x(1-x)^3} \end{aligned}$$

Ker je h C^2 funkcija na intervalu $[a,b]$, lahko izračunamo

$$\begin{aligned} h(X_{t\wedge T}) &= h(x) + \int_0^{t\wedge T} h'(x)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge T} h''(x)d\langle X\rangle_s \\ &= \dots \\ &= h(x) + \int_0^{t\wedge T} \frac{(X_s-\log(X_s))\sqrt{X_s(1-X_s)}}{(1-X_s)^2} dW_s - \frac{1}{2}(t\wedge T) \end{aligned}$$

4. Ker je h omejena funkcija na intervalu $[a,b]$, lahko sklepamo, da je lokalni martingal iz semimartingalske dekompozicije $h(X_{t\wedge T})$ tudi omejen martingal za $t < \infty$ (z začetno vrednostjo 0). Potem lahko po izreku o ustavljanju zapišemo

$$E(h(X_T)) = h(x) - \frac{1}{2}E(T)$$

Porazdelitev X_T smo izračunali pod nalogo b., in tako dobimo

$$E(T) = 2\left(h(x) - h(a)\frac{g(b)-g(x)}{g(b)-g(a)} - h(b)\frac{g(x)-g(a)}{g(b)-g(a)}\right)$$

Rešitev naloge 38, page 22

1. Po Itôvi formuli velja

$$\begin{aligned} e^{X_T - \frac{1}{2}\langle X\rangle_T} &= 1 + \int_0^T e^{X_s - \frac{1}{2}\langle X\rangle_s} d\left(X - \frac{1}{2}\langle X\rangle\right)_s + \frac{1}{2}\int_0^T e^{X_s - \frac{1}{2}\langle X\rangle_s} d\langle X\rangle_s \\ &= 1 + \int_0^T e^{X_s - \frac{1}{2}\langle X\rangle_s} dX_s \\ &= 1 + \int_0^T e^{X_s - \frac{1}{2}\langle X\rangle_s} H_s dB_s . \end{aligned}$$

   Sledi, da je

$$K_s = e^{X_s - \frac{1}{2}\langle X\rangle_s} H_s .$$

2. Naj bo

$$H_s = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j 1_{[t_j, t_{j+1})}(s) .$$

   Definirajmo

$$Y_t = \int_0^t H_s dB_s .$$

   Za ta elementarni integrand je

$$Y = Y_T = \int_0^T H_s dB_s = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j \left(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}\right) .$$

   Nadalje je

$$\langle Y\rangle_T = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j^2 (t_{j+1} - t_j) .$$

   Iz prve točke naloge sledi, da je

$$Y \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j^2 (t_{j+1} - t_j)\right) = 1 + \int_0^T \exp\left(Y_s - \frac{1}{2}\langle Y\rangle s\right) H_s dB_s .$$

   Sledi

$$K_s = \exp\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j^2 (t_{j+1} - t_j)\right) \cdot \exp\left(X_s - \frac{1}{2}\langle X\rangle s\right) H_s .$$

   Ko vstavimo nam kot prvi člen v zgornji formuli ostane točno $E(Y)$.

Rešitev naloge 39, page 23

1. Trditev velja za $n = 0$. Predpostavimo, da je M^n kvadratno integrabilen martingal. Računamo s pomočjo Itôve formule

$$\begin{aligned} M_t^{n+1} &= H_{n+1}(B_t, t) \\ &= \int_0^t \frac{\partial H_{n+1}}{\partial x}(B_s, s) dB_s + \int_0^t \frac{\partial H_{n+1}}{\partial t}(B_s, s) ds + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 H_{n+1}}{\partial x^2}(B_s, s) ds \\ &= \int_0^t n H_n(B_s, s) dB_s . \end{aligned}$$

Sledi, da je M^{n+1} lokalni martingal. Po indukcijski predpostavki je M^n kvadratno integrabilen martingal, zato je

$$E\left[(M_s^n)^2\right] \leq E\left[(M_t^n)^2\right]$$

za $s \leq t$ in posledično

$$\int_0^t E\left[(n M_s^n)^2\right] ds \leq n^2 t E\left[(M_t^n)^2\right] < \infty .$$

Sklepamo lahko, da je M^{n+1} kvadratno integrabilen martingal.

2. Iz definicij je $E\left[\left(M_t^0\right)^2\right] = 1$. Itôva formula nam da

$$M_t^{n+1} = \int_0^t (n+1) M_s^n dB_s ,$$

Itôva izometrija pa

$$E\left[\left(M_t^{n+1}\right)^2\right] = n^2 \int_0^t E\left[(M_s^n)^2\right] ds .$$

Sledi

$$E\left[\left(M_t^1\right)^2\right] = t, E\left[\left(M_t^2\right)^2\right] = 2t^2, \ldots$$

in po indukciji

$$E\left[(M_t^n)^2\right] = n! \cdot t^n .$$

Rešitev naloge 40, page 23

1. Funkcija

$$f(x) = \frac{x}{1-x}$$

je na $(0,1)$ dvakrat zvezno odvedljiva. Ker proces vedno ostane na tem intervalu, lahko uporabimo Itôvo formulo. Izračunamo

$$f'(x) = \frac{1}{x(1-x)} \quad \text{in} \quad f''(x) = \frac{2x-1}{x^2(1-x^2)}.$$

Ugotovimo še, da je

$$dX_t = X_t(1-X_t)dW_t \quad \text{in} \quad d\langle X\rangle_t = X_t^2(1-X_t)^2 dt$$

in

$$X_t = \frac{e^{Y_t}}{1+e^{Y_t}}, \quad \text{torej} \quad 2X_t - 1 = \frac{e^{Y_t}-1}{e^{Y_t}+1} = \tanh(Y_t/2).$$

Sledi

$$\begin{aligned}
f(X_t) - f(x_0) &= Y_t - y_0 \\
&= \int_0^t \frac{1}{X_s(1-X_s)} dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{2X_s-1}{X_s^2(1-X_s)^2} d\langle X\rangle_t \\
&= \int_0^t dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t (2X_s-1)ds \\
&= W_t + \frac{1}{2}\int_0^t \tanh(Y_s/2)ds.
\end{aligned}$$

Funkcija $\mu(y) = \tanh(y/2)$ ima odvod omejen z $1/2$, zato je izpolnjen Lipschitzov pogoj in s tem zagotovljen obstoj krepke rešitve in njena enoličnost.

2. Iz dejstva, da je X omejen, izhaja da je X omejen martingal, torej je $E(X_t) = E(X_0) = x_0$. Iz prvega dela naloge imamo, da je

$$Y_t = y_0 + W_t + \frac{1}{2}\int_0^t (2X_s - 1)ds.$$

Sledi

$$E(Y_t) = y_0 + \frac{1}{2}\int_0^t (2x_0-1)ds = y_0 + (x_0 - 1/2)t$$

3. Veljalo bo

$$X_tY_t = x_0y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y\rangle_t.$$

Vstavimo diferenciale in ne levi in desni uporabimo pričakovano vrednost. Ker je X omejen, lahko poljubno zamenjamo integriranje in pričakovane vrednosti. Sledi

$$E(X_tY_t) = x_0y_0 + \frac{1}{2}\int_0^t E(X_s(2X_s-1))ds + \int_0^t E(X_s(1-X_s))ds.$$

Poenostavimo in sledi

$$E(X_tY_t) = x_0y_0 + \frac{1}{2}\int_0^t E(X_s)ds = x_0y_0 + \frac{x_0 \cdot t}{2}.$$

Kovarianca sledi.

Rešitev naloge 41, page 24

1. Zapišemo

$$X_T = X_t + \int_t^T f(B_s - B_t + B_t)ds.$$

Zaradi neodvisnosti Brownovega gibanja $(B_s - B_t : s \geq t)$ od $\mathcal{F}_t$, lahko izračunamo pogojno pričakovano vrednost po običajnih pravilih kot

$$E(X_T|\mathcal{F}_t) = X_t + \psi(B_t, T-t).$$

2. Označimo $M_t = E(X_T|\mathcal{F}_t)$. Po definiciji je M martingal. Po Itôvi formuli je

$$M_t = X_t + \int_0^t \frac{\partial\psi}{\partial x}(B_s, T-s)dB_s - \int_0^t \frac{\partial\psi}{\partial t}(B_s, T-s)ds + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2\psi}{\partial^2 x}(B_s, T-s)ds.$$

Po definiciji je X proces z končno totalno variacijo. Isto velja za zadnja dva integrala. Sledi, da se morajo vsi procesi s končno totalno variacijo sešteti v konstanto. Sledi

$$X_T = E(X_T) + \int_0^t \frac{\partial\psi}{\partial x}(B_s, T-s)dB_s.$$

3. Računamo

$$\begin{aligned}\psi(x,t) &= \int_0^t E(\sin(x + B_s))ds \\ &= \int_0^t E(\sin x \cdot \cos B_s + \cos x \cdot \sin B_s)ds \\ &= \int_0^t \sin x \cdot e^{-\frac{s}{2}}ds \\ &= 2\sin x\left(1 - e^{-\frac{t}{2}}\right).\end{aligned}$$

V tem primeru je $E(X_T) = 0$. Iskan integrand je tako

$$H_s = 2\cos x\left(1 - e^{-\frac{(T-t)}{2}}\right).$$

Rešitev naloge 42, page 25

1. Trditev sledi iz Itôve formule.

2. Označimo
$$\gamma = \sqrt{\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}\,.$$
Zapišemo
$$e^{-rt}R_t = \frac{S_0^{(1)}}{S_0^{(2)}}\exp\left(-rt + (\mu_1-\mu_2)t + \gamma B_t - \frac{(\sigma_1^2-\sigma_2^2)t}{2}\right).$$
S spremembo mere lahko Brownovemu gibanju B dodamo poljubno konstantno tendenco, tako da je $B_t = \tilde{B}_t + at$, in je pod novo mero $\tilde{B}$ Brownovo gibanje. Konstanto a is lahko izberemo tako, da bo
$$-rt + (\mu_1-\mu_2)t - \gamma at - \frac{(\sigma_1^2-\sigma_2^2)t}{2} = -\frac{\gamma^2}{2}t\,.$$

3. Izračunati moramo
$$V_0 = E_Q\left(e^{-rT}\left(\frac{S_0^{(1)}}{S_0^{(2)}}e^{rT+\gamma\tilde{B}_T-\frac{\gamma^2}{2}T} - 1\right)_+\right).$$
To pa je točno formula za ceno evropske nakupne opcije z $K = 1$, $S_0 = \frac{S_0^{(1)}}{S_0^{(2)}}$, $r = r$ in $\sigma = \gamma$.

4. Teorija (izrek o martingalski reprezentaciji) nam pove, da lahko zapišemo
$$\tilde{V}_T = V_0 + \int_0^T H_s d\tilde{B}_s\,,$$
kjer je $\tilde{B}$ Brownovo gibanje (pod Q) iz točke b (kakor v standardnem Black-Scholes-ovem modelu). Diferencial $d\tilde{B}_t$ pa je enak linearni kombinaciji diferencialov v zgornjem integralu. Iz Itôve leme, pozitivnosti cen delnic in bančnega računa, ter asociativnosti stohastične integracije pa končno sledi, da lahko integracijo proti $B^{(1)}$ oz. $B^{(2)}$ realiziramo s trgovanjem z S_1, S_2 ter bančnim računom.

Rešitev naloge 43, page 26

1. Naloga je elementarna.

2. $f(x) = s((x-a)^+ - (x-b)^+)$, $x \in [0,\infty)$, in ustrezno za S_T namesto x. Ker vemo, da je za $0 \le t < T$ in $k \in (0,\infty)$, s.g. $Q(t;k) := Q_{\mathcal{F}_t} e^{-r(T-t)}(S_T-k)^+ = S_t\Phi(d_1) - ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$, kjer je
$$d_1 = \frac{\log(S_t/k) + r(T-t) + \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

in

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t};$$

sledi iz linearnosti upanja da je s.g. $V_t = s(Q(t;a) - Q(t;b))$. Seveda je $V_T = f \circ S_T$, s.g.

3. Ponovno sledi iz linearnosti da je iskani H razlika ustreznih H-jev za evropski nakupni opciji z izvršnima cenama a in b, pomnožen z s. Se pravi $H_t = s\left(\Phi\left(\frac{\log(S_t/a)+r(T-t)+\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) - \Phi\left(\frac{\log(S_t/b)+r(T-t)+\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)\right)$.

4. Sledi, ker je v tem primeru $df_+' = s\delta_k$, in znamo vrednotiti evropsko nakupno opcijo (ter njene deterministične mnogokratnike, po linearnosti).

Rešitev naloge 44, page 27

1. Zapišemo drugače

$$\tilde{S}_t = S_0 \exp\left(\sigma\left(B_t - \int_0^t \frac{r(s)-\mu}{\sigma} ds\right) - \frac{\sigma^2}{2} t\right).$$

Zamenjati bi morali mero tako, da bi bil proces

$$B_t - \int_0^t \frac{r(s)-\mu}{\sigma} ds$$

pod novo mero Brownovo gibanje. Za Radon-Nikodýmov odvod izberemo po izreku Girsanova izraz

$$\exp\left(\int_0^T \frac{r(s)-\mu}{\sigma} dB_s - \frac{1}{2}\int_0^T \left(\frac{r(s)-\mu}{\sigma}\right)^2 ds\right).$$

Pod to novo mero Q je

$$W_t = B_t - \int_0^t \frac{r(s)-\mu}{\sigma} ds$$

Brownovo gibanje. Pod Q bo torej

$$S_t = S_0 \exp\left(\int_0^t r(s) ds + \sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t\right).$$

2. Izračunati je treba

$$V_0 = e^{-\int_0^T r(s) ds} E_Q\left((S_T - k)_+\right).$$

Pričakovana vrednost je

$$e^{-\int_0^T r(s) ds} E_Q\left(\left(S_0 e^{\int_0^T r(s) ds + \sigma W_T - \frac{\sigma^2}{2} T} - k\right)_+\right).$$

Ta integral poznamo, saj smo ga izračunali za evropsko nakupno opcijo v primeru konstantne obrestne mere. Edina razlika je, da nadomestimo rT z $\int_0^T r(s)ds$. Sledi

$$V_0 = S_0\Phi(d_1) - ke^{-\int_0^T r(s)ds}\Phi(d_2)$$

za

$$d_1 = \frac{\log(S_0/k) + \int_0^T r(s)ds + \frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}}$$

in

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

3. V prejšnji točki nadomestimo $\int_0^T r(s)ds$ z $\int_t^T r(s)ds$ in T s $T-t$, ter S_0 z S_t.

4. Za navadno evropsko nakupno opcijo z izvršno ceno k je $H_t = \Phi(d_1)$. Velja enaka formula, le definiramo

$$d_1 = \frac{\log(S_t/k) + \int_t^T r(s)ds + \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Rešitev naloge 45, page 27

1. Zapišemo lahko

$$1 = 1(\bar{S}_t \geq a) + 1(\bar{S}_t < a).$$

Oba člena na desni sta $\mathcal{F}_t$ merljiva. Računamo

$$\begin{aligned}
E_Q\Big(1(\bar{S}_T \geq a)|\mathcal{F}_t\Big) &= \\
&= E_Q\Big(1(\bar{S}_t \geq a, \bar{S}_T \geq a)|\mathcal{F}_t\Big) + E_Q\Big(1(\bar{S}_t < a, \bar{S}_T \geq a)|\mathcal{F}_t\Big) \\
&= 1(\bar{S}_t \geq a) + 1(\bar{S}_t < a)E_Q\left(S_t \max_{0\leq s\leq T-t} \exp\left(\sigma(W_{t+s} - W_t) - \frac{\sigma^2}{2}s\right) \geq a|\mathcal{F}_t\right) \\
&= 1(\bar{S}_t \geq a) + 1(\bar{S}_t < a)F\left(a/S_t, T-t\right).
\end{aligned}$$

2. Če S_t doseže prag a pred časom T, vemo zagotovo, da bomo na koncu morali izplačati 1. Gibanje cene delnice od T_a naprej je brezpredmetno, zato v varovalnem portfelju delnice ne bo več, zaradi odsotnosti diskontiranja pa bo vrednost v trenutku $T_a \leq T$ enaka zgornjemu znesku. Alternativno sledi željeno takoj iz točke (a) ̌(kjer smo izračunali kar V_t, ker je $r = 0$) če izraz tam evaluiramo v T_a.

3. Do strogo pred časom $T_a \wedge T$ (procese ustavimo ob $T_{a-\epsilon} \wedge (T-\epsilon)$, $\epsilon \in (0, a \wedge T)$) lahko uporabimo Itôvo formulo in dobimo komponento H_t s parcialnim odvodom "$\partial V_t / \partial S_t$" za kar uporabimo izraz iz točke (a): do tega časa se namreč V_t izraža s C^2 funkcijo S_t-ja in t-ja. Uporabiti moramo samo še pravilo za odvajanje posrednih funkcij. Spustimo $\epsilon \downarrow 0$.

Rešitev naloge 46, page 28

1. Naloga je elementarna.

2. $f(x) = s((x-a)^+ - (x-b)^+)$, $x \in [0, \infty)$, in ustrezno za S_T namesto x. Ker vemo, da je za $0 \le t < T$ in $k \in (0, \infty)$, s.g. $Q(t;k) := Q_{\mathcal{F}_t} e^{-r(T-t)}(S_T - k)^+ = S_t \Phi(d_1) - k e^{-r(T-t)} \Phi(d_2)$, kjer je
$$d_1 = \frac{\log(S_t/k) + r(T-t) + \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$
in
$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t};$$
sledi iz linearnosti upanja da je s.g. $V_t = s(Q(t;a) - Q(t;b))$. Seveda je $V_T = f \circ S_T$, s.g.

3. Ponovno sledi iz linearnosti da je iskani H razlika ustreznih H-jev za evropski nakupni opciji z izvršnima cenama a in b, pomnožen z s. Se pravi $H_t = s\left(\Phi\left(\frac{\log(S_t/a)+r(T-t)+\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) - \Phi\left(\frac{\log(S_t/b)+r(T-t)+\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)\right)$.

4. Sledi, ker je v tem primeru $df'_+ = s\delta_K$, in znamo vrednotiti evropsko nakupno opcijo (ter njene deterministične mnogokratnike, po linearnosti).

Rešitev naloge 47, page 29

1. Skica grafa je elementarna. Velja $f(S_T) = (S_T - a)^+ + (b - S_T)^+ = (S_T - a)^+ + (S_T - b)^+ - (S_T - b)$.

2. Vemo, da je za $0 \le t < T$ in $k \in (0, \infty)$, s.g.
$$Q(t;k) := E_Q\left[e^{-r(T-t)}(S_T - k)^+ | \mathcal{F}_t\right] = S_t \Phi(d_1) - k e^{-r(T-t)} \Phi(d_2),$$
kjer je
$$d_1 = \frac{\log(S_t/k) + r(T-t) + \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$
in
$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$
Iz linearnosti pričakovane vrednosti sledi, da je s.g.
$$V_t = Q(t;a) + Q(t;b) - (S_t - b e^{-r(T-t)}).$$
Upoštevali smo, da je diskontirani proces cene delnice Q-martingal.

3. Ponovno sledi iz linearnosti da je iskani H vsota H-jev za evropski nakupni opciji z izvršnima cenama a in b zmanjšan za H terminske pogodbe z izvršno ceno b. Se pravi

$$\begin{aligned} H_t &= \Phi\left(\frac{\log(S_t/a) + r(T-t) + \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \\ &\qquad + \Phi\left(\frac{\log(S_t/b) + r(T-t) + \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) - 1\,. \end{aligned}$$

Za terminsko pogodbo je varovalni portfelj enota temelja-delnice.

Rešitev naloge 48, page 29

1. V času T_1 smo lastniki evropske nakupne opcije za obdobje dolžine $T - T_1$ in z začetno ceno temelja S_{T_1}. Sledi, da bo s.g.

$$V_{T_1} = F(S_{T_1}, T - T_1; r_2, k, \sigma)\,.$$

2. Vemo, da je, za $t \in [T_1, T)$,

$$H_t = \frac{\partial F}{\partial x}(S_t, T - t; r_2, k, \sigma)$$

in

$$H_t^0 = \tilde{V}_t - H_t \tilde{S}_t\,,$$

kjer je $\tilde{S}$ diskontirana cena delnice in $\tilde{V}$ diskontirani vrednostni proces.

3. Omejimo se na interval $[0, T_1]$. V trenutku T_1 lahko za opcijo iztržimo $F(S_{T_1}, T - T_1; r_2, k, \sigma)$. To pomeni, da bo

$$V_0 = E_Q\left[e^{-r_1 T_1} F\left(S_{T_1}, T - T_1; r_2, k, \sigma\right)\right].$$

Pri tem je Q zamenjava mere na $[0, T_1]$, v kateri računamo z r_1. Sledi, da je

$$V_0 = e^{-r_1 T_1}\, E_Q\left[F\left(s_0 e^{r_1 T_1 + \sigma W_{T_1} - \sigma^2 T_1/2}, T - T_1; r_2, k, \sigma\right)\right],$$

kjer je W Brownovo gibanje glede na Q.

4. Sledi neposredno iz prejšnje točke, ko upoštevamo $W_{T_1}/\sqrt{T_1} \sim_Q \mathrm{N}(0,1)$.

Rešitev naloge 49, page 30

1. Ker sta pod Q temelj $\tilde{S}_t$ in cena $\tilde{V}_t$ martingala, je

$$\begin{aligned}\tilde{V}_t &= E_Q\left(\tilde{V}_T|\mathcal{F}_t\right)\\ &= E_Q\left(\tilde{S}_T|\mathcal{F}_t\right)\\ &= \tilde{S}_t\,.\end{aligned}$$

   Iz tega tudi sledi, da je $(H_t^0, H_t) = (0,1)$ za $0 \le t \le T$.

2. Velja

$$\begin{aligned}V_t &= e^{-r(T-t)}E_Q\left[V_T|\mathcal{F}_t\right]\\ &= e^{-r(T-t)}E_Q\left[(k-S_T)_+|\mathcal{F}_t\right]\\ &= e^{-r(T-t)}E_Q\left[(S_T-k)_+-(S_T-k)|\mathcal{F}_t\right]\\ &= e^{-r(T-t)}E_Q\left[(S_T-k)_+-(S_T-k)|\mathcal{F}_t\right]\\ &= S_t\Phi(d_1)-e^{-r(T-t)}k\Phi(d_1)-\left(S_t-ke^{-r(T-t)}\right)\\ &= -S_t\Phi(-d_1)+ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_2)\,.\end{aligned}$$

   Zaradi linearnosti je $H_t = \Phi(d_1)-1 = -\Phi(-d_1)$.

3. Označimo z $V_t^{n,k}$ nakupne opcije z izvršno ceno k in s $V_t^{p,k}$ ceno prodajne opcije z izvršno ceno k. Iz namiga razberemo, da je

$$f(x) = 1-\frac{1}{b-k}\left[(x-k)_+-(x-b)_+\right]-\frac{1}{k-a}\left[(k-x)_+-(a-x)_+\right].$$

   Sledi, da je cena *Metulja* enaka

$$V_t = 1-\frac{1}{b-k}\left[V_t^{n,k}-V_t^{n,b}\right]-\frac{1}{k-a}\left[V_t^{p,k}-V_t^{p,a}\right].$$

4. Za linearne kombinacije opcij so varovalne listnice iste linearne kombinacije varovalnih listnic. Varovalna listnica za opcijo, ki vedno izplača 1, je $(e^{-r(T-t)}, 0)$.

Rešitev naloge 50, page 31

1. Po stohastični formuli za parcialno integriranje je

$$\left[(F(T)-F(s))W_s\right]\Big|_0^T = -\int_0^T f(s)W_s ds + \int_0^T (F(T)-F(s))dW_s\,.$$

   Izraz na levi je 0. Ker je $E(X)=0$, je po Itôvi izometriji

$$\mathrm{var}(X) = E(X^2) = \int_0^T (F(T)-F(s))^2 ds\,.$$

2. Velja
$$V_0 = E_Q\left(\tilde{V}_T\right),$$
kjer je pod Q
$$\log(S_t) = \log(S_0) + rt + \sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t$$
in je W pod Q Brownovo gibanje, torej je
$$\tilde{V}_T = \left(\exp\left(-rT + \int_0^T f(s)\log S_s ds\right) - e^{-rT}k\right)_+.$$
Slučajna spremenljivka
$$Z = -rT + \int_0^T f(s)\log S_s ds$$
ima pod Q normalno porazdelitev s pričakovano vrednostjo
$$a = -rT + \log(S_0) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\int_0^T sf(s)ds$$
in varianco
$$b^2 = \sigma^2 \int_0^T (F(T) - F(s))^2 ds.$$
Vzemimo
$$c = e^{-rT}k$$
in sledi
$$V_0 = e^{-rT}\left[e^{a+\frac{b^2}{2}}\Phi\left(\frac{a + b^2 - \log c}{b}\right) - c\Phi\left(\frac{-\log c + a}{b}\right)\right].$$

3. Vemo, da je
$$V_t = e^{-r(T-t)}E_Q\left(V_T|\mathcal{F}_t\right).$$
Prepišemo
$$\begin{aligned}
&\int_0^T f(s)\log S_s ds \\
&= \int_0^T f(s)\left(\log(S_0) + rs + \sigma W_s - \frac{\sigma^2}{2}s\right)ds \\
&= \int_0^t f(s)\left(\log(S_0) + rs + \sigma W_s - \frac{\sigma^2}{2}s\right)ds \\
&\qquad + \int_t^T f(s)\left(\log(S_0) + rs + \sigma(W_s - W_t) - \frac{\sigma^2}{2}s\right)ds \\
&\qquad\qquad + \sigma W_t \int_t^T f(s)ds
\end{aligned}$$

Prvi in zadnji člen sta merljiva glede na $\mathcal{F}_t$, srednji pa je neodvisen. Račun za srednji člen je enak kot v točki b., le da moramo na novo prebrati a, b, c ter S_0. Namesto $\log(S_0)$ vstavimo

$$\int_0^t f(s)\left(\log(S_0) + rs + \sigma W_s - \frac{\sigma^2}{2}s\right) + \sigma W_t \int_t^T f(s)ds,$$

in

$$a = \log(S_0)\int_t^T f(s)ds + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\int_t^T sf(s)ds$$

ter

$$b^2 = \int_t^T (G(T) - G(s))^2 ds,$$

kjer je

$$G(s) = \int_t^T f(s)ds.$$

Rešitev naloge 51, page 32

1. Vemo, da je
$$V_0 = E_Q\left(\tilde{V}_T\right).$$
Vemo tudi, da je pod Q
$$S_t = S_0 e^{rt+\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t},$$
torej je
$$V_T = \left(S_0 e^{2rT + \frac{\sigma}{3}(W_{T/3}+W_{2T/2}+W_T) - \sigma^2 T} - K\right)_+$$
in
$$\tilde{V}_T = e^{-rT}\left(e^{\log S_0 + 2rT + \frac{\sigma}{3}(W_{T/3}+W_{2T/3}+W_T) - \sigma^2 T} - K\right)_+.$$
Prepišemo v
$$\tilde{V}_T = \left(e^{\log S_0 + rT + \frac{\sigma}{3}(W_{T/3}+W_{2T/3}+W_T) - \sigma^2 T} - e^{-rT}K\right)_+.$$
Iz lastnosti Brownovega gibanja sledi, da je vsota $W_{T/3} + W_{2T/2} + W_T$ normalno porazdeljena s pričakovano vrednostjo 0, iz lastnosti $\mathrm{cov}(W_s, W_t) = \min(s,t)$ pa sledi, da je
$$\mathrm{var}\left(W_{T/3} + W_{2T/2} + W_T\right) = 2T + 8T/3 = 14T/3.$$
V eksponentu v $\tilde{V}_T$ imamo normalno slučajno spremenljivko s pričakovano vrednostjo $a = \log S_0 + rT - \sigma^2 T$ in varianco $b^2 = 14\sigma^2 T/27$. Ceno V_0 preberemo iz formule v navodilu s $c = e^{-rT}K$.

2. Vemo, da je pod Q
$$\tilde{V}_{2T/3} = E_Q\left(\tilde{V}_T | \mathcal{F}_{2T/3}\right).$$
Prepišimo
$$\tilde{V}_T = \left(e^{\log S_0 + rT + \frac{\sigma}{3}(W_{T/3} + 2W_{2T/3} + (W_T - W_{2T/3}) - \sigma^2 T} - e^{-rT} K\right)_+.$$
Slučjna spremenljivka $W_T - W_{2T/3}$ je pod Q neodvisna of $\mathcal{F}_{2T/3}$, porazdelitev pa je normalna s pričakovano vrednostjo 0 in varianco $T/3$. Pri računanju pogojne pričakovane vrednosti lahko obravnavamo $W_{T/3}$ in $W_{2T/3}$ kot konstanto. Označimo
$$\bar{S}_{2T/3} = S_0 e^{rt + \frac{\sigma}{3}(W_{T/3} + 2W_{2T/3}) - \sigma^2 T}.$$
Računamo
$$E_Q\left[\left(e^{\log \bar{S}_{2T/3} + \frac{\sigma}{3}(W_T - W_{2T/3})} - e^{-rT} K\right)_+\right].$$
Pogojno pričakovano vrednost preberemo iz formule v besedilu naloge z $a = \log \bar{S}_{2T/3}$, $b^2 = \sigma^2 T/27$ in $c = e^{-rT} K$.

Rešitev naloge 52, page 32

1. Zapišemo lahko
$$V_T = (S_T - a)_+ + (b - S_T)_+ = (S_T - a)_+ + (S_T - b)_+ - (S_T - b).$$
Označimo z $V_t^{e,k}$ ceno evropske nakupne opcije z izvršno ceno k. Iz zgornjega sledi, da je
$$V_0 = E_Q(\tilde{V}_T) = V_0^{e,a} + V_0^{e,b} - (S_0 - be^{-rT}).$$

2. Naj bo $H_t^{e,k}$ komponenta varovalne listnice za evropsko nakupno opcijo z izvršno ceno k v trenutku t. Iz zgornjega sledi, da je
$$H_t = H_t^{e,a} + H_t^{e,b} - 1.$$